TOMO XLIV (A) Núms. 9 y 10. - SEPBRE. - OCT. 1948

ANALES
DE LA
REAL SOCIEDAD ESPAÑOLA DE FISICA Y QUIMICA

SERIE A — FISICA

ORGANO DE LOS INSTITUTOS DE FISICA DEL CONSEJO SUPERIOR DE INVESTIGACIONES CIENTIFICAS

SUMARIO

Páginas

A. Durán y C. Sánchez del Río.—Un nuevo método para la medida de aberraciones. 489

M. Ballester.—El estudio de los atmosféricos y el campo eléctrico terrestre en Cambridge. I. Un registro electromecánico del gradiente del potencial 511

C. Morais y M. Egües.—Las aberraciones de noveno orden y su comparación con las de órdenes superiores 523

D. Santana.—Acerca de la estructura del yodato de plata 557

C. Morais.—Nuevo método de cálculo de rayos oblícuos cualesquiera 567

F. Poggio y M. Martín Retortillo.—Espectro de absorción de los aceites de oliva en la zona ultravioleta 579

NOTAS

J. Palacios.—La causa de la miopía nocturna 589

L. Villena.—Sobre el movimiento rotatorio 591

J. L. Amorós y M. S. Ahmed.—Diagramas de polvo con cristal único 605

Bibliografía 607

ACTAS Y REVISTAS

Acta de la Sesión científica celebrada el 5 de julio de 1948 618

Acta de la Sesión científica celebrada el 18 de octubre de 1948 618

TODA LA CORRESPONDENCIA, TANTO CIENTIFICA, COMO ADMINISTRATIVA, DEBE DIRIGIRSE A **REAL SOCIEDAD ESPAÑOLA DE FISICA Y QUIMICA.**—FACULTAD DE CIENCIAS, SECCION DE FISICA.—TELEFONO 23-80-96 (CIUDAD UNIVERSITARIA)

JUNTA DIRECTIVA

SOLICITUD DE INGRESO EN LA SOCIEDAD

Para ingresar como Socio en la «Real Sociedad Española de Física y Química» precisa solicitar del Secretario de la misma un boletín de inscripción, que debe devolverse firmado por dos Socios que conozcan al solicitante, además de otros requisitos personales.

La cuota anual es de 70 pesetas para España y países de habla española por una sola sección y de 100 pesetas por las dos secciones.

Los Socios reciben franco de porte los ANALES DE FÍSICA Y QUÍMICA, constituyendo un volumen de memorias originales, conferencias especiales y revistas y bibliografía.

Tienen derecho a asistir a las sesiones ordinarias de la Sociedad y de sus secciones, así como a las reuniones anuales.

Pueden consultar los libros y revistas de la Biblioteca de la Sociedad.

Los boletines de inscripción pueden solicitarse, así como toda información complementaria, del

Sr. Secretario de la «Real Sociedad Española de Física y Química», Pabellón de Ciencias Químicas (Ciudad Universitaria) Madrid.

32. UN NUEVO METODO PARA MEDIDA DE ABERRACIONES (*),

por A. DURÁN Y C. SÁNCHEZ DEL RÍO.

SUMMARY

A new method is exposeed for studying the aberration of optical systems, which may be particularly applied to the determination of spherical aberration.

This method is based upon the limitation (caused by means of a slit) of the rays which come out the lens, causing them to be reflected on an especially shaped speculum placed along the optical axis and near the focus. Once the rays are reflected, they impinge on a screen, which is conveniently placed and on which they describe a curve from whose shape aberration can be calculated.

We also describe the shape which should be presented by the speculum in order that the aberration curve might appear directly on the screen in polar coordinates, but in view of its difficult construction, we turn to more usual surfaces (spherical and cylindrical) which can be also employed when they are properly located.

Inmediately a theoretical study and discussion take place to choose either of them, seeing that only the cylindrical one can be employed in the practice.

The method is applied to an experimental case, studying the error in the procedure.

Dentro del campo de la Optica Instrumental, pocos temas han merecido tanto la atención de los experimentadores como la medida de los defectos de los sistemas ópticos ; ello es debido a que cualquier avance ulterior se funda sobre el conocimiento experimental de las aberraciones de los instrumentos reales.

Prescindiendo de particularidades de detalle y atendiendo sólo a los tipos más importantes, es posible clasificar los métodos de medida de aberraciones en dos grandes grupos :

A) Métodos geométricos.
B) Métodos interferenciales.

Una vez establecida la manera de realizar la expresión cuantitativa de los defectos de un sistema óptico puede pasarse a una cuestión de suma importancia. ¿ Cómo puede medirse experimentalmente la aberración de un sistema ? Porque, en efecto, ya se trate de establecer criterios de tolerancia práctica que permitan el proyecto de nuevos instrumentos, ya se trate de comprobar si un de-

(*) Extracto de una tesis doctoral presentada en la Universidad de Madrid el 5 de junio de 1948.

terminado aparato satisface ciertas tolerancias, la medida experimental de aberraciones es de extraordinario interés. El objeto de la presente memoria es exponer un nuevo método para la medida de la aberración esférica (a ella se puede reducir el estudio de superficies de onda cualesquiera según se verá al final) de los sistemas ópticos. Pero antes de describir el nuevo método conviene encuadrarlo dentro de una clasificación general de los métodos existentes.

Los primeros fueron iniciados por Foucault (1); entre todos los métodos que propuso sólo uno ha perdurado: el de la cuchilla que se desplaza a lo largo del eje. Este era el mejor de los procedimientos hasta comienzos del presente siglo, en que Hartmann (2) expuso su método de las observaciones extrafocales de los rayos materializados por medio de diafragmas con agujeros; este sistema sigue siendo uno de los más precisos y de él se han hecho numerosas variantes; tiene el inconveniente de ser largo y laborioso, por lo que no se presta a determinaciones rápidas. Más recientemente ha dado Wetthauer (3) su método de la imagen rasante, en el cual los rayos se materializan como en la experiencia de Hartmann y sus intersecciones se determinan mediante fotografías sobre una placa que forma un pequeño ángulo con el eje óptico. El procedimiento es bastante exacto.

Los métodos inteferenciales pueden subdividirse, a su vez, en dos tipos: métodos de exploración con franjas interferenciales y métodos en que la información se obtiene de un solo golpe de vista.

Los primeros—de los cuales existen muchas variantes (4)—se fundan todos en el empleo de rendijas dobles de Young, que se desplazan por toda la apertura del sistema que se estudia, observándose simultáneamente la interferencias en el foco del mismo.

En los segundos se estudia la superficie de onda emergente de un sistema óptico, haciéndola interferir o con ella misma cambiada de posición, o con una onda no deformada. Estos métodos fueron iniciados por Waetzmann (5), que empleaba un sistema interferencial análogo al utilizado por Lummer para obtener las franjas que llevan su nombre.

Twyman (6) empezó a usar, poco tiempo después, un aparato que externamente presenta grandes analogías con el interferómetro de Michelson; en dicho aparato se hace interferir a la onda aberrante con una no deformada, obteniéndose de este modo en el campo visual unas franjas interferenciales que son precisamente las líneas de nivel de la superficie de onda que se estudia.

El método de hacer interferir la onda aberrante con ella misma cambiada la posición ha sido empleado por Ronchi (7), que utilizaba primero el biprisma de Fresnel y posteriormente el interferómetro de red de difracción, en el cual se superponen los haces luminosos difractados de diversos órdenes.

Todos estos sistemas interferenciales son muy prácticos cuando se trata de obtener rápidamente una idea cualitativa de las aberraciones presentes en un determinado sistema óptico, pero son de aplicación laboriosa e insegura si se deseen informaciones cuantitativas.

En el presente trabajo se expone un nuevo método—clasificable entre los geométricos—para medir aberraciones esféricas. En él los rayos se materializan por una rendija, de modo que no quedan individualizados, sino formando un conjunto que se ha designado con el nombre de «plano de luz». Los rayos de este plano se reflejan en una superficie cilíndrica colocada de forma especial en el foco del sistema y se dispersan espacialmente, formando una superficie que cortada por una pantalla (o placa fotográfica) dibuja en ella la curva de aberración en ciertas coordenadas.

Fundamento del método

El fundamento del nuevo método es el siguiente:

Sea (fig. 1) L la lente (o sistema de lentes) que se trata de estudiar y que supondremos iluminada por una fuente puntual. R es

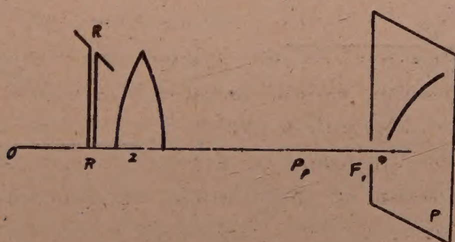


Figura 1

una rendija que pasa por el eje óptico OO′ del sistema L y es perpendicular a él; la supondremos en el plano del dibujo. La existencia de dicha rendija limita el haz de rayos que sale de la lente para concentrarse alrededor del foco y sólo permite el paso de los que se encuentran en el plano R′RO determinado por ella y el eje óptico;

se designará a este plano, en lo sucesivo, con el nombre de «plano de luz».

En el foco paraxial F'_p de la lente se concentran los rayos paraxiales del plano de luz. Los otros rayos de dicho plano ya no cortan al eje óptico OO′ en F'_p, sino en distintos puntos; si es F′ el punto donde un rayo que incide con un ángulo σ' corta al eje, la distancia $\Delta' = F'_pF'$ mide la aberración esférica correspondiente al ángulo σ'.

Supóngase ahora que se coloque a lo largo del eje una superficie reflectora alabeada, tal que en cada punto del eje la normal a la superficie tenga una dirección distinta fuera del plano de luz. En estas condiciones los diversos rayos del plano de luz salen de él al reflejarse y se salen en cuantía distinta, según sea el punto de incidencia. En un plano P colocado perpendicularmente al eje óptico los rayos dibujan una curva de cuya forma y del conocimiento de la superficie reflectora empleada puede deducirse la aberración del sistema que se estudia.

Esta deducción sería particularmente sencilla eligiendo adecuadamente la superficie reflectora. Supongamos que ésta fuese, por ejemplo, la que engendra una recta AB (fig. 2) al desplazarse a lo

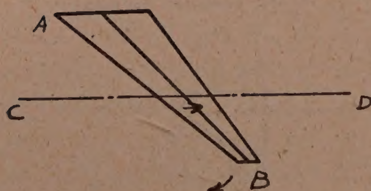


Figura 2

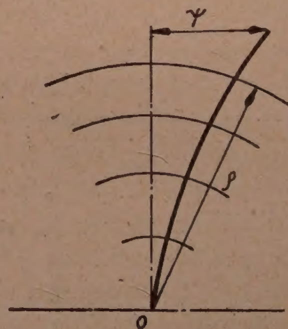


Figura 3

largo de CD, perpendicular a ella, girando al mismo tiempo en torno al punto de intersección; es decir, la superficie engendrada por una recta que se mueve de manera que todos sus puntos describen hélices del mismo paso. En este caso—si se pusiese el espejo de modo que CD (fig. 2) coincida con el eje óptico de la lente que se examina—se ve fácilmente que la curva de aberración en el plano P (de la figura 1) vendría dada en coordenadas polares; el radio ρ

(fig. 3) mediría (en una escala dependiente de las características del espejo y de la distancia de la pantalla) el ángulo σ' de incidencia del rayo sobre el eje y el ángulo ψ las separaciones respecto del foco paraxial (si, como se ha representado en la figura, los rayos paraxiales han sido los no desviados, es decir, si en el foco paraxial la normal al espejo estaba en el plano de luz).

Superficies de pequeño tamaño como la descrita son difíciles de tallar, por lo cual parece que el método descrito es impracticable. Hay que recordar, sin embargo, que lo único fundamental es que los rayos del plano de luz incidan sobre una superficie cuyas normales se separen gradualmente del citado plano de luz, dependiendo esta separación del punto de incidencia. Entre las superficies que cumplen estas condiciones hay dos de una gran simplicidad: superficie esférica cuyo centro esté fuera del plano de luz y superficie cilíndrica cuyo eje no esté sobre el plano de luz. Estas superficies tienen el inconveniente frente a la antes propuesta de que el eje óptico no puede colocarse «sobre» la superficie, lo que lleva consigo la necesidad de introducir cálculos complementarios. La facilidad de conseguir estas superficies esféricas y cilíndricas obliga, sin embargo, a aceptarlas. Y antes de seguir adelante es preciso decidir entre una y otra, para lo cual se estudian a continuación los dos casos.

a) *Superficie esférica.*—La superficie que parece más sencilla para resolver el problema planteado es la superficie esférica empleada, de modo que el plano de luz π (fig. 4) no pase por el centro de la esfera. Sobre un punto genérico P de la circunferencia, sección APB de radio r, incide un rayo luminoso DP; se presenta el problema de averiguar la dirección de salida PE después de reflejado si se conoce el ángulo τ que forma DP con el radio CP y la posición del punto P fijada por el ángulo $u = ACP$. Una vez conseguido esto se podrá resolver el problema inverso de hallar τ y u (de cuya relación se deduce la aberración esférica $\Delta'(\sigma')$) midiendo experimentalmente la dirección de salida PE por medio del punto luminoso que determina en una pantalla.

Teniendo en cuenta que la normal a la esfera en P es PN, se ve que PE (rayo reflejado) queda determinado por dos condiciones: que esté en el plano DPN y que sean iguales los ángulos $\widehat{DPN}$ y $\widehat{NPE}$. La expresión analítica de estas dos condiciones conduciría

a fórmulas muy complicadas y prácticamente inaplicables, por lo cual resulta preferible proceder de otra manera. Para hallar la posición de PE nos fundaremos en la propiedad de que la reflexión respecto de la normal PN es equivalente a dos simetrías respecto de dos planos perpendiculares entre sí que se cortan según PN. Los dos planos que eligen son el NPG, perpendicular al plano de luz π, y el PNH (perpendicular a NPG). Por la primera simetría (respecto de NPG) se pasa de DP a PI, y por la segunda (respecto de PNH), de PI al rayo reflejado PE. Supóngase ahora que la pantalla se coloca (en este caso de la superficie esférica es preferible ha-

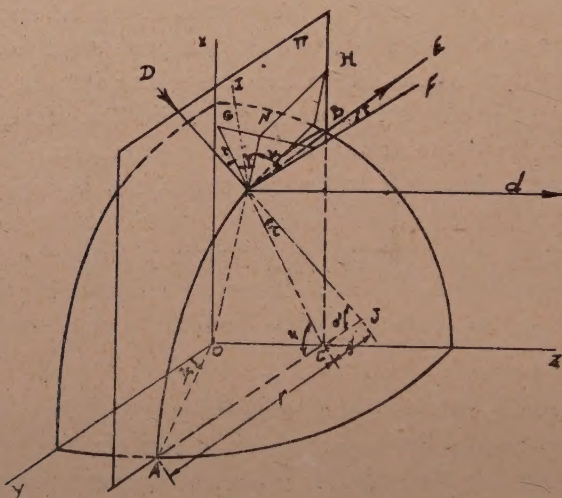


Figura 4

cerlo así) perpendicularmente al eje OZ y a una distancia d de P. Entonces, si τ fuese constantemente nulo (es decir, si los rayos incidentes fuesen todos concurrentes en C) es fácil demostrar que en la pantalla aparecería una circunferencia de radio

$$r + d \operatorname{tg} (90 - 2\psi) = r + d \operatorname{ctg} 2\psi$$

siendo r el radio de APB y ψ la latitud (fig. 4) que fija la sección utilizada. (Por tanto, $r = R \cos \psi$, siendo R el radio de la esfera). No siendo éste el caso, en general, la figura que aparecerá diferirá de una circunferencia; la manera más fácil de medir esta diferencia es determinar lo que se separa de la circunferencia en la direc-

ción de la tangente (fig. 5) (esto es, la discrepancia de PE respecto de PF (fig. 4)), que vale

$$a = \frac{d \operatorname{tg} \tau}{\operatorname{sen} 2\psi}$$

Para aclarar esto supóngase que la línea AC de la fig. 5 es la que aparece en la pantalla colocada, como antes se ha dicho, perpendicularmente al eje OZ de la fig. 4. Para averiguar la correspondencia entre τ y u para el rayo que ha llegado a C se trazan desde C las tangentes (en general habrá dos que corresponden a una ambigüedad de signo de τ) a la circunferencia tangente en A a AC y

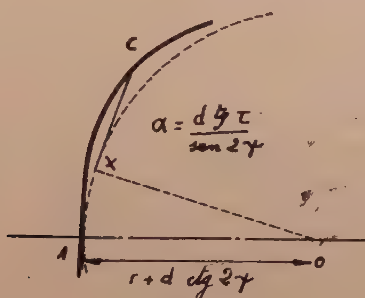


Figura 5

de radio $r + d$ ctg 2ψ; la distancia α de C al punto de tangencia T permite calcular τ por medio de la fórmula

$$\operatorname{tg} \tau = \frac{a}{d} \operatorname{sen} 2\psi$$

y el ángulo TOA mide directamente u.

Una vez establecida la correspondencia entre los ángulos τ y los u, el paso a la aberración esférica es muy sencillo. Supóngase que AC (fig. 4) coincide con el eje óptico del sistema que se estudia (lo cual puede asegurarse si la curva que aparece en la pantalla es simétrica respecto del eje AO de la figura 5); entonces se deduce inmediatamente de la figura 4:

$$\sigma' = u - \tau$$

$$s' = \frac{r \operatorname{sen} \tau}{\operatorname{sen}(u - \tau)}$$

siendo σ' el ángulo PδA de incidencia del rayo sobre el eje óptico

y s' la distancia, a partir del punto arbitrario, C, del punto de incidencia. Las diferencias de s' expresan la aberración esférica que ha quedado así deducida, considerando la figura dibujada en la pantalla por los rayos del plano de luz.

Este procedimiento de la superficie esférica, tal como ha sido bosquejado, presenta el inconveniente de que la medida hay que realizarla (fig. 5) en la dirección CT próxima a la propia curva. Y puesto que esta curva tiene una cierta anchura, resulta prácticamente muy impreciso el resultado. Este inconveniente, unido a ciertas dificultades aparecidas en el montaje experimental, hicieron renunciar al empleo de las superficies esféricas en la medida de las aberraciones por reflexión. Las superficies cilíndricas no presentan, como veremos, estos inconvenientes, por lo cual sólo estas últimas han sido utilizadas.

b) *Superficie cilíndrica.*—Para la medida de la aberración esférica por el método de reflexión empleando el espejo cilíndrico hay que colocar éste de manera que su eje forme un cierto ángulo $\varphi (< 45°)$ con el plano de luz π. En la fig. 6 está representado

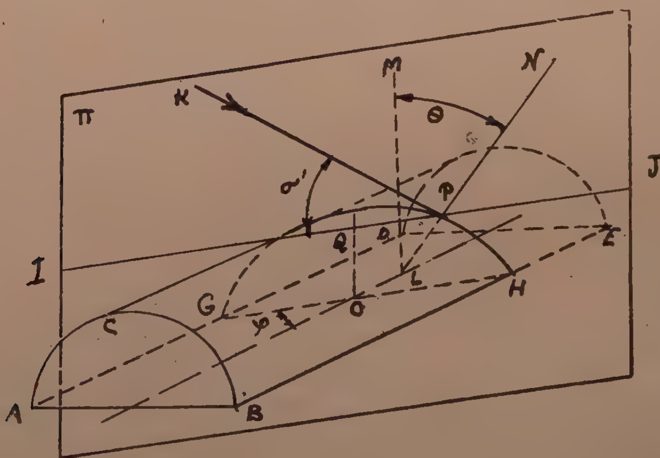


Figura 6

el cilindro ABCDEF y el plano de luz π, que lo corta según la elipse GPH. Supondremos que el eje óptico del sistema que se estudia es paralalelo al eje mayor GH de la elipse y que la pantalla, donde se observa la figura que dibujan los rayos reflejados, es perpendicular al eje óptico y se encuentra a una distancia d del foco (del siste-

ma óptico) que se encuentra sobre la elipse sección GPH (d se toma suficientemente grande para que el error de localización de foco sea despreciable; esto se puede conseguir gracias a que, según se verá, la influencia de la precisión de d es relativamente pequeña). Con estos supuestos se liga la incidencia σ' con la correspondiente aberración esférica Δ', resolviendo sucesivamente los tres problemas siguientes:

1.° Cálculo, a partir de la figura que aparece en la pantalla, del ángulo $\theta = \widehat{MLN}$, que corresponde a cada rayo de luz determinado por el ángulo $\sigma' = \widehat{KPI}$ de incidencia sobre el eje. (En la fig. 6, a la cual se refieren las letras indicadas, KP representa una rayo genérico del plano de luz que corta a la elipse sección en P; en este punto, la normal al cilindro—que es la perpendicular al eje del mismo—es LPN. La recta IJ, por otra parte, es paralela a GH y, por lo tanto, al eje óptico del sistema que se estudia.)

2.° Conocido el ángulo θ, averiguar la posición del punto de incidencia P, esto es, averiguar la distancia $f = QP$ (fig. 6).

3.° Una vez resuelto el problema anterior, hallar el valor Δ' de la aberración, es decir, la distancia entre el punto en que KP corta al eje óptico y el punto de éste donde se reúnen los rayos paraxiales (foco paraxial).

A continuación se resuelven estos problemas—con las hipótesis aceptadas al principio—, rehuyendo sistemáticamente su tratamiento analítico, que conduce a fórmulas prácticamente inaplicables.

Cálculo de θ y σ'.—El ángulo θ que se pretende medir es el que forma la normal PN al cilindro en el punto P con la perpendicular a GH (y, por lo tanto, al eje óptico del sistema que se estudia) situada en el plano de luz π; el plano de este ángulo θ forma con el plano perpendicular al eje óptico un ángulo φ (ángulo que el eje del cilindro forma con el plano de luz). En la fig. 7 se representan estas particularidades: P es el punto del cilindro donde incide el rayo KP, y IJ es la paralela al eje óptico por el punto P; la normal en P es PN, que se encuentra fuera del plano de luz KIJ y formando un ángulo θ con la recta PM′ perpendicular a IJ y en el plano de luz; y, finalmente, el rayo reflejado es PU, que encuentra a la pantalla Σ—normal a IJ—en el punto U, que fijamos por sus coordenadas polares ρ, ψ (el radio ρ medido a partir del punto de intersección de IJ con Σ, y el ángulo ψ tomando como origen la recta JT,

intersección de Σ con el plano de luz). El problema queda, por tanto, planteado en la siguiente forma: dados ψ, ρ, calcular σ' y θ. Para resolverlo sin necesidad de recurrir a cálculos complicados, basta darse cuenta que se pasa del rayo KP al PU—reflexión respecto de la normal PN—mediante dos simetrías: una respecto del plano RPN que pasa por PN y es perpendicular al plano de luz (por esta simetría se pasa de KP a PT), y otra respecto del plano NPS, que también pasa por PN y es perpendicular al anterior (por esta simetría se pasa de PT a PU). De estas consideraciones se deduce que

$$\beta = \frac{\psi}{2} \qquad [1]$$

siendo β el ángulo M′PS.

Figura 7

Por otra parte, en el tetraedro PNRM′S se verifican las relaciones

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{\operatorname{tg}\beta}{\cos\varphi} \qquad [2]$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\theta \operatorname{sen}\varphi \qquad [3]$$

la primera de ellas permite calcular θ si se conoce β (es decir, si se conoce $\psi = 2\beta$) (φ es un dato de la experiencia), y la segunda da el valor del ángulo M′PR, que se designará con la letra α. Este ángulo es muy útil, ya que $\widehat{TPJ} = \widehat{UPJ} = \sigma' - 2\alpha$; es decir,

$$\rho = d \operatorname{tg}(\sigma' - 2\alpha)$$

de donde

$$\sigma' = \operatorname{arc\,tg} \frac{\rho}{d} + 2\alpha \qquad [4]$$

que es la fórmula con la cual es posible obtener el ángulo σ'. Las relaciones [1], [2], [3] y [4], por lo tanto, resuelven el problema de hallar θ y σ' si se conocen φ (dato de la experiencia), ψ y ρ.

Cálculo de t.—Una vez establecida la correspondencia σ' θ, el paso siguiente es averiguar, a partir de θ, la distancia t que existe entre P y Q, siendo Q el punto de intersección de IJ con el eje menor de la elipse sección GPH (fig. 6). El cálculo de esta distancia es muy sencillo con el auxilio de la figura 8, donde se represen-

Figura 8

tan, con la notación de la figura 6, los elementos que interesan (conviene hacer notar que el plano QVP es perpendicular al QLV, lo que indica que $\widehat{LVP}=90°$ y que el plano PLV también lo es a QVL, siendo, por tanto, $\widehat{QVP}=90°$). En los triángulos QVP y LVP se tiene, respectivamente,

$$VP = t \operatorname{sen} \varphi$$
$$VP = r \operatorname{sen} \theta$$

siendo r el radio LP del cilindro; de aquí

$$t = r \frac{\operatorname{sen} \theta}{\operatorname{sen} \varphi} \qquad [5]$$

que permite calcular t si se conoce θ (r y φ son datos de la experiencia).

Cálculo de la aberración Δ'.—Conocida la relación existente entre σ' y t, el cálculo del valor de la aberración que corresponde a cada t no es difícil. Supóngase, por el momento, que el cilindro ha sido colocado de tal manera que el eje óptico EE′ del sistema que se estudia es tangente a la elipse sección en el punto donde ésta es cortada por el eje menor, es decir, en el punto Z de la figura 9. En-

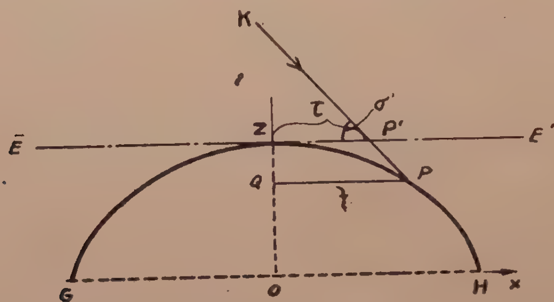


Figura 9

tonces el punto donde el rayo KP—inclinado un ángulo σ'—corta al eje óptico es P′ y la distancia ZP′$=\tau$ es

$$\tau = t - \frac{QZ}{\operatorname{tg} \sigma'}$$

QZ se obtiene del siguiente modo: los semiejes de la elipse son $r/\operatorname{sen} \varphi$ y r, de manera que su ecuación será

$$x^2 \operatorname{sen}^2 \varphi + Z^2 = r^2$$

de aquí se deduce

$$OQ = \sqrt{r^2 - t^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}$$

de donde

$$QZ = r - \sqrt{r^2 - t^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}$$

Introduciendo este valor en la expresión anterior

$$\tau = t - \frac{r - \sqrt{r^2 - t^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}}{\operatorname{tg} \sigma'} \qquad [6]$$

que permite calcular τ si se conoce t. (Hay que advertir que si t es negativo—es decir, P está a la izquierda de OZ en la figura 9—el signo menos que precede a la fracción, en la expresión anterior debe ser sustituído por un signo positivo.)

Una vez averiguada la correspondencia, τ, σ' (dando a τ signo positivo o negativo, según se encuentre más lejos o más cerca de la lente, respectivamente, que Z) la aberración esférica viene dada por

$$\Delta'_{\sigma'} = \tau_{\sigma'} - \tau_{\sigma'=0}$$

donde $\tau_{\sigma'=0}$ representa el valor de τ correspondiente a incidencia infinitamente pequeña (τ paraxial).

En el cálculo anterior se ha supuesto que el eje óptico del sistema era tangente en Z (fig. 9) a la elipse sección. Si no fuese así, habría que realizar un ajuste de posición de eje por tanteos análogos a los que se hacen en la mayoría de los métodos de medida de aberracio-

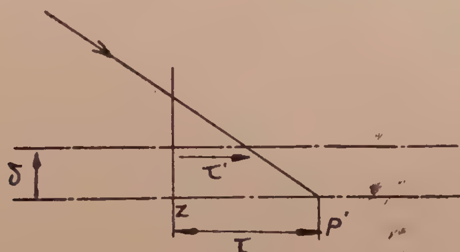


Figura 10

nes. En este caso a un desplazamiento δ del eje de referencia (figura 10) le corresponde un cambio de τ a

$$\tau' = t - \frac{\delta}{\operatorname{tg} \sigma'}$$

Mediante tanteos habría que buscar un δ que hiciese la curva de aberración lo más reducida posible.

Este proceso es, en ciertos casos, bastante enojoso, por lo que es conveniente evitarlo, lo cual puede conseguirse, según se verá, si se ajusta adecuadamente el montaje experimental.

Medida experimental de la aberración esférica por reflexión sobre un cilindro

a) *Montaje.*—Para la medida de la aberración esférica por reflexión en un cilindro colocado en las proximidades del foco se utiliza el montaje experimental representado esquemáticamente en la figura 11; en ella, L es el foco luminoso (arco voltaico, etc.); C_1 es un condensador que concentra la luz sobre la rendija R_1 situada en

el plano focal del colimador C_2, cuyo papel es hacer la luz paralela antes de entrar en el prisma de desviación constante P ; a la salida de este objetivo, C_3 concentra los rayos de las diversas longitudes de onda en su plano focal, donde la rendija puntual R_2 permite escoger la longitud de onda que interese ; en conjunto, el sistema $R_1C_2PC_3R_2$ constituye un monocromador mediante el cual se tiene luz puntual monocromática. La luz que procede del foco puntual R_2 se hace paralela (esto no es necesario si se desean medir aberraciones para distancias no infinitas del objeto) por medio de C_4 y limitada por la rendija vertical R_3 (normal al plano del dibujo que se supone horizontal) viene a incidir sobre el sistema en estudio S ; en

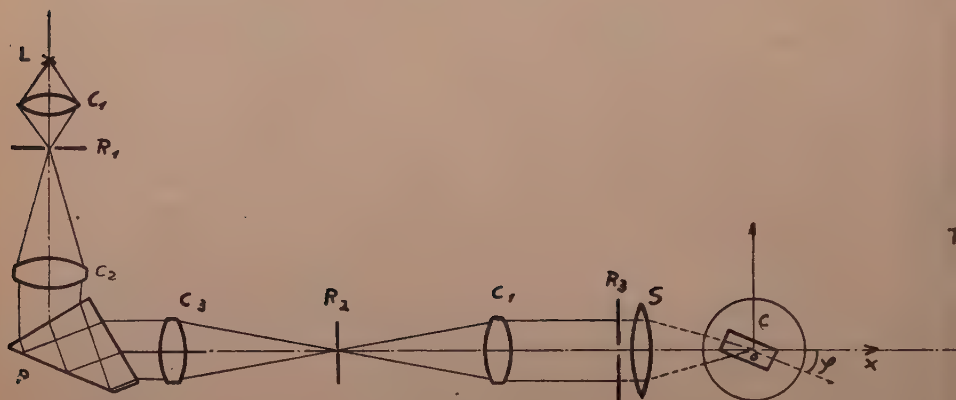


Figura 11

las proximidades del foco de éste se encuentra el espejo cilíndrico C, con su eje (horizontal), formando un pequeño ángulo φ con el eje óptico del conjunto y montado sobre la platina de un goniómetro. Los rayos reflejados dibujan sobre la pantalla o placa fotográfica π la figura de cuya forma se deduce la aberración esférica del sistema. La visibilidad es buena empleando como pantalla un vidrio deslustrado y observando por transparencia.

En la figura 12 pueden verse fotografías del montaje descrito tal como ha sido empleado.

Una variante experimental consiste en la sustitución de la rendija vertical R_3 por una doble rendija que produce un sistema de franjas de interferencia ; una de estas franjas sirve para fijar, con

más precisión que con una rendija, el plano de luz. En este caso la intensidad luminosa es generalmente tan pequeña que la observación debe ser forzosamente fotográfica.

b) *Ajuste.*—El ajuste del aparato reseñado es una de las tareas más importantes, por dos razones:

1.ª Porque las fórmulas [1] y [7] establecidas anteriormente han sido obtenidas imponiendo ciertas restricciones a las posiciones del espejo, y es necesario conseguir experimentalmente que dichas condiciones se cumplan.

2.ª Porque se facilita el cálculo y se simplifica la interpretación rápida de los resultados mediante una disposición adecuada de los diversos elementos ópticos que integran el montaje experimental.

Las diferentes operaciones de ajuste se exponen a continuación por el orden en que hay que realizarlas. Se llevan a cabo empleando en π una pantalla (vidrio deslustrado); la medida, posteriormente, puede efectuarse, bien sobre ella misma, bien sobre una placa fotográfica que la reemplace.

La primera operación que hay que realizar—y sobre la cual no se ha de tratar aquí—es el ajuste del monocromador, de la rendija R_2 y de la lente colimador C_4 (cuando la haya). Hecho esto se dispone de un haz luminoso paralelo y monocromático.

Una vez que se tiene preparada la fuente luminosa se llega al punto más importante y delicado: el ajuste del espejo cilíndrico C (fig. 11). Respecto de este ajuste, uno de los extremos más importantes es el de conseguir una perfecta perpendicularidad del eje del cilindro con el eje de giro del goniómetro sobre el cual va montado. Para comprobar esta perpendicularidad el procedimiento más rápido es colocar en la pantalla del goniómetro un espejo plano (con la cara horizontal) en lugar del cilindro y concentrar sobre él, por medio de una lente (que puede ser el propio sistema S que se estudia) los rayos paralelos que salen de C_4 previamente limitados por un pequeño diafragma colocado en R_3; en la pantalla π se observa la mancha luminosa que producen los rayos reflejados; el ajuste se realice entonces corrigiendo con sus tornillos la posición de la platina, hasta que se consiga que la mancha luminosa de la pantalla permanezca inmóvil al girar la platina del goniómetro en torno a su eje. Cuando esto esté logrado se puede asegurar que el espejo plano auxiliar se mueve en su plano y, por lo tanto, que la platina del goniómetro es perpendicular al eje del giro del mismo.

A continuación se sustituye el espejo plano auxiliar por el cilíndrico, que se coloca sobre la platina de manera que su eje pase aproximadamente por el de giro del goniómetro. (La condición de que esto se cumpla exactamente no es esencial; más adelante se verá, sin embargo, la manera de comprobarla.) Hecho esto se quita, momentáneamente, la rendija R_3 y el sistema S y se observa en la pantalla la sombra proyectada por el cilindro C; la inmovilidad de esta sombra al girar el cilindro de cualquier manera es un indicio para asegurar la perpendicularidad del eje óptico del sistema (dirección del haz paralelo que sale de C_1) y el eje de giro del goniómetro.

Quedan ahora al cilindro tres posibilidades de desplazamiento; es decir, quedan por realizar tres ajustes correspondientes a su posición según el eje vertical OZ (perpendicular al plano del dibujo en la figura 11), o sean los ejes *ox* y *oy*. Se indica a continuación la manera de proceder para estos ajustes. Pero antes de nada es necesario colocar el sistema S y la rendija R_3.

Una vez esto realizado y con la platina del goniómetro suficientemente baja para que no entorpezca, aparece sobre la pantalla un segmento rectilíneo luminoso vertical producido por los rayos del plano de luz limitado por la rendija R_3. Entonces se va elevando lentamente la platina del goniómetro sobre la cual se ha puesto el cilindro lo más aproximadamente posible paralelo al eje óptico y con su eje en el plano de luz; a medida que el cilindro sube, el segmento rectilíneo va desapareciendo por la parte de abajo, siendo visible la figura correspondiente reflejada en el cilindro que se observa en la parte superior de la pantalla: retocando la posición *oy* (fig. 11) y girando convenientemente el goniómetro, se consigue que $\varphi=0$ (fig. 11) y que el eje del cilindro esté en el plano de luz. En estas condiciones la figura reflejada es una recta prolongación de la no reflejada que antes aparecía. Al agotarse el segmento directo debe su parte alta hacer contacto con el reflejado (que crece de arriba a abajo). Si la rendija R_3 que se emplea es corta y sólo actúa en la parte de la lente comprendida entre el eje y el borde, puede esto no ocurrir debido a que la rendija esté demasiado alta; esta observación sirve, por lo tanto, para el ajuste preciso de la rendija R_3.

Con esto el aparato está ya prácticamente ajustado y basta un pequeño giro (cuyo valor φ se mide con el goniómetro) del espejo cilíndrico para que el segmento luminoso reflejado se deforme dibujando la curva de aberración. Ahora bien, si se desea que el origen



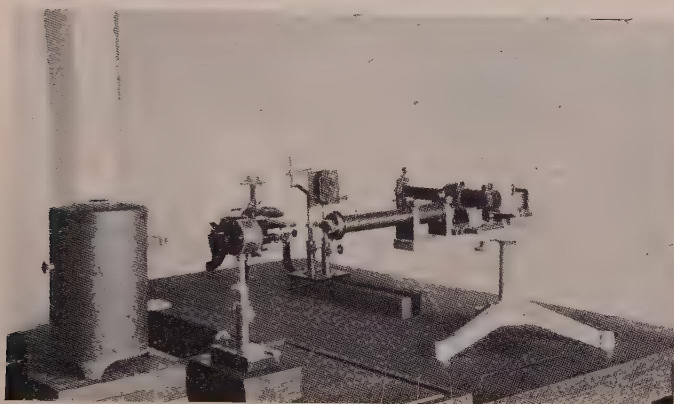


Figura 12

(foco paraxial) corresponda al eje vertical en la figura de aberración, es necesario que los rayos paraxiales sean los que no se salgan del plano de luz, o, lo que es lo mismo, sean los que se reflejen en la parte más alta (intersección con el eje menor) de la elipse sección del plano de luz con el cilindro; esto se consigue ajustando convenientemente el goniómetro en la dirección *ox* (fig. 11). La posición crítica depende, en general, del ángulo φ y sólo es independiente de él cuando el eje de giro del goniómetro y el eje del cilindro se cortan; este hecho sirve para retocar convenientemente la posición del cilindro sobre la platina hasta conseguir este ajuste.

Una vez realizados todos estos ajustes la figura luminosa que dibujan los rayos en la pantalla constituye la curva de aberración en un sistema especial de coordenadas. Los puntos situados en la vertical (intersección del plano de luz con la pantalla) corresponden a zonas corregidas (de aberración nula) y si el ángulo se ha girado en el sentido que indica la figura 11 y el observador se encuentra al otro lado de la pantalla π, los puntos luminosos que aparezcan a su derecha corresponden a zonas sobrecorregidas, y los que aparezcan a su izquierda, a zonas subcorregidas. Lo contrario ocurre cuando el cilindro ha sido girado en el otro sentido.

c) *Medidas.*—Las primeras medidas que hay que llevar a cabo son las que no dependen del sistema que se estudia: el radio del espejo cilíndrico r, el ángulo girado φ y la distancia del foco del sistema que se estudia a la pantalla. Estas medidas se efectúan, la de φ, por el procedimiento indicado, y las de r y d, por los métodos habituales.

La forma de la figura de aberración (fig. 3) se determina fotográficamente o por puntos sobre un vidrio deslustrado. Si los ajustes se han hecho de modo que los rayos verticales se reflejen sobre la parte superior de la elipse sección y que el eje de giro del goniómetro coincida con el semieje menor de la misma, el punto interior de la curva de aberración (punto O de la figura 3) permanece inmóvil cualquiera que sea el ángulo girado φ, y se realizan las medidas en coordenadas polares tomando dicho punto como polo y la vertical (o más precisamente la línea de intersección del plano de luz con π, cuya dirección se ha podido determinar antes con la figura directa de la rendija R_3, que aparecía cuando el cilindro estaba fuera del campo) como origen; si no se ha realizado la parte del ajuste descrita al final del apartado anterior (y que no era imprescindible),

hay que tomar como polo el extremo inferior del segmento reflejado cuando $\varphi=0$.

De cualquiera de las dos maneras, por la medida de la curva se establece una correspondencia de valores φ, ρ (fig. 3). Se aplican entonces sucesivamente las fórmulas [1], [2], [3] y [4].

$$\beta = \frac{\psi}{2}$$

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{\operatorname{tg} \beta}{\cos \varphi}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \theta \operatorname{sen} \varphi$$

$$\sigma' = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\rho}{d} \pm 2\alpha$$

Y con ellas es calcula la correspondencia θ, σ'. (La duplicidad de signo en la última de las fórmulas se debe al hecho que el último término se debe sumar o restar, según el punto de incidencia sobre el cilindro (fig. 6) se encuentre a un lado o a otro del semieje menor de la elipse sección. Si el cilindro está girando como en la figura 11 y el rayo paraxial incide sobre la parte superior de la elipse sección, a los puntos subrecorregidos les corresponde el signo menos y a los puntos subcorregidos el signo más.) A continuación, con la fórmula [5].

$$t = r \frac{\operatorname{sen} \theta}{\operatorname{sen} \varphi}$$

se obtiene la correspondencia t, σ'. Finalmente se recurre a la fórmula [6] y, eventualmente, a la [7].

$$\tau = t - \frac{r - \sqrt{r^2 - t^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}}{\operatorname{tg} \sigma'}$$

$$\Delta'_{\sigma'} = \tau_{\sigma'} - \tau_{\sigma'=0}$$

que permiten establecer la correspondencia entre el ángulo de incidencia sobre el eje σ' y la aberración esférica Δ'.

Comparación con valores teóricos

Con objeto de comprobar experimentalmente los razonamientos anteriores se ha procedido a la medida, por el método descrito, de una lente de las siguientes características:

$r_1 = 94{,}75$ mm.

$d = 11{,}37$ mm. $n_D = 1{,}52014$

$r_2 = -68{,}76$ mm.

Se ha empleado un foco puntual situado a una distancia de la lente $s_1 = 460$ mm. Hechos, para este caso, los oportunos cálculos trigonométricos (una marcha de rayas paraxiales y tres a alturas $h = 10$, 20 y 28 mm.) resulta la aberración esférica siguiente:

$\sigma' = 6^\circ\ 16'$	$\Delta' = -\ 2{,}75$ mm.
$\sigma' = 13^\circ\ 30'$	$\Delta' = -\ 11{,}70$ mm.
$\sigma' = 21^\circ\ 22'$	$\Delta' = -\ 25{,}24$ mm.

En el montaje experimental empleado se ha utilizado un espejo cilíndrico de radio R=3,1 mm.; el ángulo que el eje del cilindro formaba con el plano de luz era de 1° 28′ y la distancia del foco paraxial de la lente a la pantalla $d = 200$ mm. La curva dibujada en la pantalla por los rayos reflejados en el cilindro es la de la figura 13,

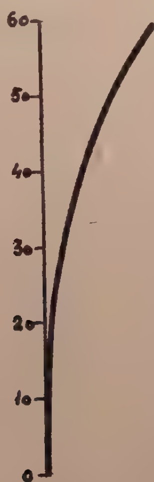


Figura 13

de la cual se deduce la siguiente correspondencia, en coordenadas polares:

ϕ	ρ
3° 20′	24,5
5° 40′	33,0
8° 00′	42,5
10° 00′	49,0
13° 00′	58,5

Para la obtención de la aberración a partir de estos datos hay que aplicar las fórmulas deducidas en los apartados anteriores. En el caso presente, sin embargo, hay que tener en cuenta que, por ser

el ángulo φ muy pequeño (1° 28′), se puede suponer sin error apreciable (los errores experimentales que se estudian después son mayores que el que esta suposición introduce) que cos $\varphi = 1$ y sen² $\varphi = 0$. Esto lleva consigo una notable simplificación, ya que, por una parte, $\theta = \frac{\psi}{2}$ y, por otra $\tau = t$. Si se tiene presente, además, que el aparato ha sido ajustado de manera que el foco paraxial de la lente fuese coincidente con el eje de giro de la platina que sostiene el espejo cilíndrico, se comprende que el punto origen O de la figura 13 haya quedado inmóvil al girarse el cilindro, lo cual significa que la aberración Δ viene dada directamente por t.

Todavía hay que hacer notar una pequeña variación que hay que introducir en la fórmula [4], que da el valor de σ'. Dicha fórmula ha sido deducida en el supuesto de que la aberración era tan pequeña que podía despreciarse su valor frente al de d. Esta suposición es, generalmente, válida; en nuestro caso, sin embargo, como se ha elegido (intencionadamente) una lente con una aberración esférica excepcional si se tiene en cuenta su focal no es posible admitir que la aberración esférica (que llega a los 25 mm.) sea despreciable frente a $d = 200$ mm. Para eliminar el error de tal suposición podría producir, se sustituye la fórmula [4] por la

$$\sigma' = \text{arc tg} \frac{\rho + \Delta'}{d} - 2\alpha$$

(En la fórmula así escrita se ha tenido en cuenta que dado el sentido de giro del cilindro y el de inclinación de la curva de la figura 13, el sistema es subcorregido. Tanto Δ' como α deben introducirse en valores absolutos.)

Con estas simplificaciones los cálculos se disponen como indica la siguiente tabla:

ψ	$\theta = \frac{\psi}{2}$	sen θ	$\Delta' = R \frac{\text{sen}\,\theta}{\text{sen}\,\varphi}$	tg α = tg θ sen φ	α	arc tg $\frac{\rho+\Delta'}{d}$	σ'
3°20'	1°40'	0,0289	3,46	0,00075	2'30''	6°50'	6°45'
5°20'	2°50'	0,0493	5,91	0,00126	4'20''	9°5'	8°56'
8°00'	4°00'	0,0695	8,32	0,00179	6'10''	11°35'	11°23'
10°00'	5°00'	0,0870	10,5	0,00224	7'40''	13°15''	13°00'
13°00'	6°30'	0,113	13,6	0,00292	10'	15°22'	15°20'

La cuarta y última columna ligan las aberraciones Δ' con el án-

gulo σ' de incidencia del rayo sobre el eje óptico en el espacio imagen.

Estas aberraciones medidas Δ'_e juntamente con las teóricas Δ'_t para los mismos ángulos (deducidas de los anteriores valores trigonométricos por interpolación gráfica) quedan expuestas comparativamente en la siguiente tabla :

σ'	Δ'_t	Δ'_e	$\Delta'_t - \Delta'_e$
6° 45'	— 3,3	— 3,5	0,2
8° 56'	— 5,7	— 5,9	—0,2
11° 15'	— 8,5	— 8,3	—0,2
13° 0'	—11,0	—10,5	—0,5
15° 2'	—14,0	—13,6	—0,4

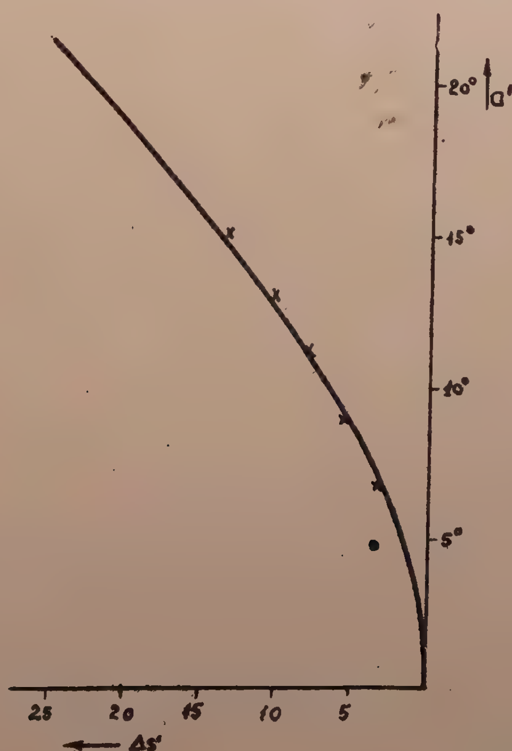


Figura 14

La misma comparación puede realizarse gráficamente en la figura 14.

En la última columna de la tabla anterior aparecen las diferencias entre los valores teóricos y los calculados. Estos errores quedan explicados por la imprecisión en la determinación de ψ en la curva de la figura 13, imprecisión que puede evaluarse en unos 30′. Según esto, el error en θ sería de unos 15′. Por otra parte, diferenciando la fórmula [5].

$$\partial \Delta = R \frac{\cos \theta}{\operatorname{sen} \varphi} \partial \theta$$

Aplicando los valores del caso presente ($R = 3{,}1$ $\operatorname{sen} \varphi = 0{,}0257$ $\cos \theta = 0$ y $\partial\theta = 0{,}0044$) a la fórmula anterior resulta como error en la determinación de la aberración

$$\partial \Delta' = \pm 0{,}53$$

que explica puntualmente las discrepancias advertidas.

BIBLIOGRAFIA

(1) FOUCAULT: *Comp. Rend.*, 44, 339 (1857); 47, 205 y 958 (1858); 49, 85 (1859); 54, 859 (1862); *Récueil des travaux scientifiques*, 1878.
Ver también: PLATZECK y GAVIOLA: *J. Opt. Soc. Am.*, 29, 484 (1939).

(2) HARTMANN: M. *Instrkde.*, 24, 1, 33 y 97 (1904).—Ver también a este respecto: FASSBERDER: *Z. Instrkde.*, 33, 177 (1913); DEMETRESCU: *Rev. d'Opt.*, 2, 453 (1923); 3, 531 (1924); GARDNER y BENNET: *S. Opt. Soc. Am.*, 11, 441 (1925); *Z. Instrkde*, 47, 197 (1927); SIADBEI: *Rev. d'Opt.*, 6, 257 (1927).

(3) WETTHAUER: *Z. Instrkde.*, 41, 148 (1921); 51, 393 (1931); 51, 553 (1931); JENSEN y LANDWEHR: *Z. Instrkde.*, 62, 7 (1942).

(7) RONCHI: La prova dei sistemi ottici. *Zanichelli*. Bologna, 1925; Ottica Ondulatoria, *Zanichelli*, Bologna, 1940.—Ver la bibliografía hasta 1942 en M. DI JORIO: *Ottica*, 7, 314 y 351 (1942).—Ver también LENOUVEL: *Rev. d'Opt.* 3, 211 y 315 (1924); 4, 294 (1925).

(4) CHALMERS: *Opt. Conv.*, 2, 156 (1912); MICHELSON: *Astrophys. J.*, 47, 283 (1918); COTTON: *Physica.*, 1, 274 (1921); MERLAND: *Rev. d'Opt.*, 3, 401 (1924); VAISALA: *Ann. Univ. Femi. Aboensis B.*, tom. 1, núm. 2, Turku, 1922; PICHT y JENSEN: *Z. Instrkde.*, 61, 361 (1941).

(5) WAETZMANN: *Ann. Phys.*, 39, 1042 (1912); BRATHE y WAETZMANN: *Naturwiss.*, 11, 225 (1923); *Z. Phys.*, 12, 253 (1923); BRATKE: *Z. Phys.*, 21, 9 (1924); HABERLAND: *Z. Phys.*, 24, 285 (1924).

(6) TWYMAN: *Phil. Mag.*, 35, 49 (1918); *Astrophys. J.*, 48, 256 (1918); *Phil. Mag.*, 42, 777 (1921); SMITH: *Trans. Opt. Soc.*, 28, 104 (1926); KINGSLAKE: *Trans. Opt. Soc.*, 28, 1 (1926); COLEMAN, CLARK y COLEMAN: *J. Opt. Soc. Am.*, 37, 671 (1947).

Universidad de Madrid.
Laboratorio de Optica.

33. EL ESTUDIO DE LOS ATMOSFERICOS Y EL CAMBIO ELECTRICO TERRESTRE EN CAMBRIDGE. 1. UN REGISTRO ELECTROMECANICO DEL GRADIENTE DE POTENCIAL, *por* MIGUEL BALLESTER CRUELLAS.

SUMMARY.

The experimental work has been carried out at the Meteorological Physics Dpt. of the Solar Physics Observatory (Cambridge University) under the direction and supervision of T. W. Wormell, M. A., Ph. D., and J. A. Pierce, M. A. For the knowledge acquired through them and kind admission I express, very indebted to them, as well as to Prof. Stratton, the Director, and Mr. Ratcliffe, of the Cavendish Laboratory, my deep acknowledments and appreciation.

An attmept was made to gather information to get, to some extent, a fairly consistent image of the processes of «Atmospherics», and therefore the interest in Lightning Discharge and Earth's Electric Field, as a way to contribute to some sort of a cyclic ensemble of ideas, was evident.

The whole work done in Cambridge will be divided into several papers, the firts one summarising the backgrounds where the technique is taken from, and the apparatus already in use there, to record the changes of the Potential Gradient, not in much detail for they have been so well described by C. T. R. Wilson and T. W. Wormell. A little discussion of the results, mainly on the electric image of the thundercloud and the possibility of a not too simple distribution of charges, is roughly added.

The papers will be given under a common general title because of their close link—or identity, as far as the physical phenomenon is concerned. As a matter of fact, those to appear later on deal with oscillographic records, to high speed time bases, of the first and last terms of

$$\mathrm{E}(t) = \frac{\mathrm{M}}{r^3} + \frac{1}{r^2 c}\,\frac{d\mathrm{M}}{dt} + \frac{1}{rc^2}\,\frac{d^2\mathrm{M}}{dt^2}$$

the total field at a given point, that is to say, the electrostatic and radiation components: the last one being known in wireless comunication as «atmospherics».

Con la presente comunicación deseamos iniciar una serie dedicada a resumir los conocimientos adquiridos y las técnicas desarrolladas en el Meteorological Physics Dpt. del Observatorio de Cambridge (Inglaterra) durante los meses de mayo 1947 a enero 1948, bajo la dirección del Dr. T. W. Wormell, a raíz de una beca concedida por la Junta de Relaciones Culturales. Quedan reunidos bajo un título común, más como consecuencia de su nexo o identificación en el terreno de los fenómenos físicos, que como resultado de una agrupación genérica en la práctica de la realización experimental. En esta primera ofrecemos algunas consideraciones teóricas fundamentales para el planteo del problema general y elección del pro-

cedimiento operatorio y describimos la técnica seguida para el registro relativamente lento de las oscilaciones del Campo Eléctrico Terrestre, especialmente en condiciones de mal tiempo o nubes tormentosas—de interés evidente—sobre la estación. Es nuestra intención exponer, en la segunda y tercera, la técnica oscilográfica encaminada al estudio de la estructura, dentro de un intervalo breve, de las descargas próximas y del campo a distancia, respectivamente; es decir, de los términos electrostáticos y radiativo (este último conocido en la terminología de la Radiocomunicación como «atmosféricos») de

$$E(t) = \frac{M}{r^3} + \frac{dM/dt}{r^2 c} + \frac{d^2 M/dt}{rc^2}$$

expresión del campo total en un punto dado.

ANTECEDENTES

Aunque el tema es de sobra conocido, nos inclinamos a hacer algunas consideraciones previas. Observaciones efectuadas en diferentes lugares de la Tierra manifiestan la presencia de un campo eléctrico vertical, dirigido hacia abajo, cuyo valor normal es, junto al suelo, de unos 100 volts/metro; si llamamos S a la densidad eléctrica superficial, ello equivale a decir existe una fuerza proporcional a S vertical, que repele cargas negativas hacia arriba, fenómeno que expresado así supone la existencia de unos 10^{-9} coulombs/m². Citemos como agentes modificadores de ese valor la variación del número de iones, de su movilidad—y, en general, la de todo factor del cual la conductividad del aire sea función, es decir, que altere la d. d. p. entre dos estratos atmosféricos—, la separación de cargas, la disipación de las mismas, etc., bien en proceso continuo o disruptivo. La corriente eléctrica convectiva resultante del transporte de cargas a tierra es, en situaciones normales, de unos $2 \cdot 10^{-16}$ ampers/cm², o, lo que es lo mismo, de unos 1000 ampers por un área igual a la del globo; lo suficiente para transportar en diez minutos, desde la atmósfera, una carga positiva del orden de la negativa previa que atribuímos al suelo.

Dado que el campo eléctrico atmosférico, a pesar de todo, se conserva, parece obligado admitir o bien la existencia de un proceso compensador que alimente en sentido contrario y mantenga el campo, evitando esa rápida aniquilación, o bien la necesidad de una revisión de los principios fundamentales, en particular de la Electrodinámica.

Posición del problema

La intensidad de la corriente aire-tierra depende, como decimos, de la conductividad y del gradiente de potencial. La primera conduce al estudio de la movilidad de los iones (tratada por Wilson llevó a la invención de su cámara), y el segundo factor, Campo Eléctrico—de correlación manifiesta con ciertos hidrometeoros, o, si se quiere, con determinados procesos mecánicos y termodinámicos localizados en la atmósfera—es el que nos ocupa en este trabajo. El estudio experimental de las variaciones de Campo o Gradiente de Potencial se deriva de las consideraciones siguientes.

Sea una esfera en presencia de un plano, a una distancia h del mismo ambos conductores; atribuyamos al último un potencial cero, el método sencillo de imágenes da para el potencial a la distancia de aquélla

$$Q(1/r - 1/2h)$$

siendo Q la carga de la misma y r su radio.

Supongamos, pues, una esfera colocada a una altura h sobre el suelo y en condiciones tales que se mantenga a potencial cero. La carga Q_0 inducida en ella por la presencia del campo eléctrico atmosférico satisface a

$$\frac{Q_0}{C_0} + V_0 = 0 \quad \text{donde} \quad \frac{1}{C_0} = \frac{1}{r} + \frac{1}{2h} \qquad [1]$$

siendo V_0 el potencial a la altura h supuesta la esfera retirada de su lugar. Esta situación, puramente electrostática, se mantiene en tanto no irrumpa el desequilibrio, que se establece de la siguiente manera: la llegada de una perturbación de campo producirá una f. e. m. que, si despreciamos inducciones residuales, podrá expresarse por

$$f(t) = \frac{Q}{C} + R\frac{dQ}{dt} \qquad [2]$$

si adoptamos un sistema colector análogo al que se esquematiza (fig. 1), en virtud del cual la capacidad conjunta expresada es

$$1/C = 1/C_0 + 1/C_1.$$

La solución

$$Q = e^{-t/\tau} \left\{ \int \frac{f(t)}{R} e^{t/\tau} dt + \text{const} \right\}$$

$$\tau = R \frac{C_1 C_0}{C_1 + C_0} \qquad [3]$$

queda pendiente de la forma matemática atribuíble a $f(t)$.

Experiencias anteriores avalan la elección de las siguientes

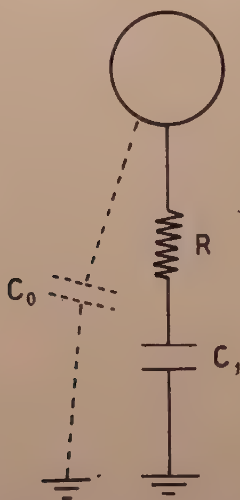


Figura 1

formas particulares, presentables comúnmente en la práctica: $^{-\alpha t}$, $E_0 e^{-\alpha t}$ sen wt (*). Sustituyendo en [3] e integrando de 0 a t con la condición $Q=0$ para $t=0$, tenemos, respectivamente,

$$Q = \frac{E_0}{R\left(\frac{1}{\tau} - \alpha\right)} \left\{ e^{-\alpha t} - e^{-t\tau} \right\}$$

$$Q = \left\{ \frac{E_0}{R} \right\} \left\{ e^{-\alpha t} \frac{\left(\frac{1}{\tau} - \alpha\right) \text{sen}\, wt - w \cos wt}{\left(\frac{1}{\tau} - \alpha\right)^2 + w^2} - e^{-t/\tau} \frac{w}{w^2 - \left(\frac{1}{\tau} - \alpha\right)^2} \right\}$$

Veamos en qué condiciones la práctica nos autoriza a despreciar el primer término de [2], en cuyo caso la carga transferible sería proporcional a la perturbación misma. Si acondicionamos el sistema

(*) Véase, por ejemplo, última parte del trabajo de J. Baltá y el autor «Avance sobre un estudio oscilográfico de los atmosféricos...» An. F. y Q., 1947, 416-417, 5.

de manera que la constante de tiempo sea muy pequeña, y considerando que la frecuencia de la perturbación suele ser muy baja

$$\frac{1}{\tau} \gg \alpha, \qquad \frac{1}{\tau} \gg w \qquad [4]$$

con lo que nos queda

$$\frac{Q}{C} = E_0 e^{-\alpha t} = f(t)$$

$$\frac{Q}{C} = E_0 e^{-\alpha t} \operatorname{sen} wt = f(t)$$

Resumiendo los hechos, la llegada de una alteración de campo producirá 1.°, un incremento de potencial a la altura h igual a $hf(t)$; 2.°, una transferencia de carga Q en el sistema. Escribamos la igualdad de potenciales que se establecen a la izquierda y a la derecha de la figura 1

$$V_0 + hf(t) + Q_0/C_0 - Q/C_0 = Q/C_1 \qquad [5]$$

siendo Q_0, como habíamos dicho, la carga retenida por la acción del campo normal V_0/h, al que se superpone la alteración. Esta ecuación involucra, como queda expresado, despreciar la caída a través de R; en otras palabras, generalizando, la relación [5] es válida para todos aquellos términos del desarrollo de una $f(t)$ cualquiera en serie de Fourier para los cuales se cumpla la condición [4].

De ahí, y teniendo en cuenta [1]

$$h \,.\, f(t) = (1/C_0 + 1/C_1) \,.\, Q$$

la medida de la carga transferida como resultado de la perturbación representa el valor de esta misma.

La tensión entre las placas del condensador C_1 es:

$$v_1 = \frac{Q}{C_1} = \frac{h\,C_0}{C_0 + C_1} f(t) \qquad [6]$$

que nos da también la magnitud de la variación del campo eléctrico.

Consecuencias que se utilizaron en el transcurso de nuestros trabajos.

Procedimiento operatorio

De lo anterior se infiere que el órgano fundamental en la técnica de observación ha de ofrecer deflexiones proporcionales a la

cantidad de electricidad que pase por el mismo. El electrómetro capilar (*) posee esta cualidad, con una inercia que cae dentro de los límites deseados para el caso (inferior a 10^{-1} seg.), y mantiene el conductor expuesto al campo, a potencial cero.

El principio físico en que se funda su funcionamiento es el siguiente: Sean dos vasos (fig. 2) llenos de mercurio unidos por un

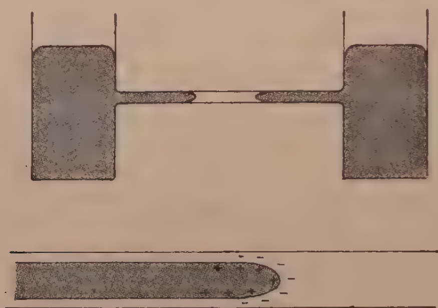


Figura 2

tubo capilar, en cuyo interior se aloja una gota de ácido sulfúrico. Llamando s a la tensión superficial mercurio-ácido, los resultados experimentales obtenidos pueden representarse por

$$s = s_0 - \tfrac{1}{2} CV^2$$

Hay una diferencia de potencial de contacto, mercurio en presencia del ácido, V_n, tal que V mide la diferencia entre aquélla y una tensión aplicada V_a; llamamos C a la capacidad específica o por unidad de área. El comportamiento del sistema, habida cuenta de los fenómenos de capilaridad, es como sigue: supongamos que uno de los meniscos se contrae o desplaza una longitud x (para explicar los resultados supondremos que el mercurio se halla rodeado de una funda de ácido, parte inferior, fig. 2); el área de contacto habrá disminuído $2\pi r.x$, la capacidad habrá variado en $2\pi rx.C$ y, por tanto, se habrá disipado una carga $Q = 2\pi rxC.V_n$; ahora bien, si análogamente el otro menisco ha avanzado la misma longitud, una carga igual es precisamente la transferida al otro lado del sistema. Recíprocamente, el paso de una cierta cantidad de electricidad ocasionará un movimiento de la burbuja de ácido, proporcional a aquélla en un sentido u otro, según su polaridad.

(*) Ampliamente estudiado por T. W. Wormell.

La disposición utilizada para la realización de las medidas fué la que se indica.

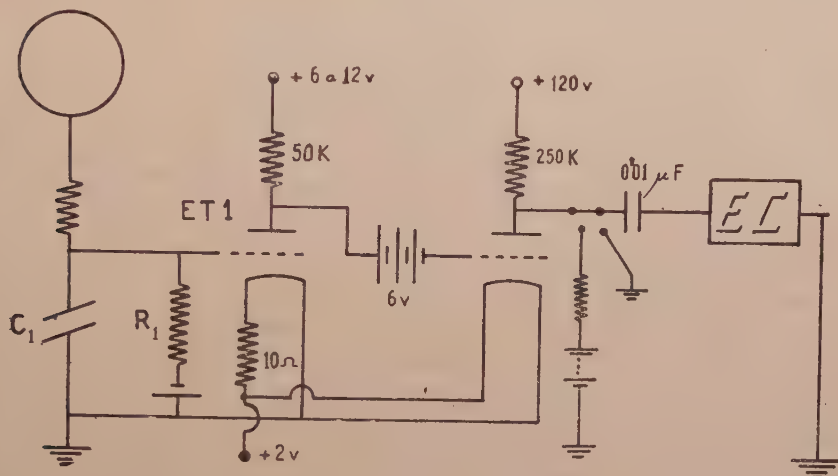


Figura 3

Veamos algunos detalles. La resistencia del circuito de entrada, R_1, cuyo valor podía modificarse a voluntad entre ciertos límites y que debía ser grande con objeto de mantener el aislamiento requerido de la antena, producía una pérdida de carga en un intervalo CR_1 bastante grande, invariable (10 seg.), pues la modificación de R_1 (entre 100 y 100.000 MΩ) se llevaba a cabo conjuntamente con la de C_1 (entre 0,1 y 0,0001μF), de tal modo que la constante de tiempo se mantuvo inalterada. No perdamos de vista que la esfera se encuentra originariamente a potencial cero, que las variaciones bruscas de campo son de duración inferior a la constante de tiempo, ya que un rayo no suele durar más de un segundo, y que la caída de exponencial de los registros debe discriminarse de la llamada «curva de recobro», sobre lo que insistiremos más adelante.

Para pruebas y contraste se abatía la esfera a fin de alojarla en el interior de una caja metálica de forma cúbica; la capacidad esfera-caja, conocida experimentalmente, permitía obtener un punto de referencia para los cálculos; era factible aplicar potenciales conocidos a la caja y observar las desviaciones, cosa que servía, de paso, para comprobar la amplificación. En el circuito de entrada, la sensibilidad podía variar según 4 posiciones, merced a que aquélla aumentaba al disminuir la capacidad de C_1 (véase [6]). Al mis-

mo tiempo se disponía de un circuito auxiliar para aplicación directa de pequeñísimas cargas al electrómetro capilar.

Durante las observaciones la esfera se hallaba a 4,80 m. de altura sobre el suelo, y los aparatos, en el interior de una cabaña cubierta de chapa metálica conectada a tierra. Todo ello en terreno abierto, llano y desprovisto de árboles y obstáculos que pudieran ocasionar descargas puntuales, etc., en una extensión de medio kilómetro a la redonda. Se calculó la distorsión de las superficies equipotenciales que pudiera originar la presencia de la cabaña, atribuyendo a ésta una forma geométrica sencilla; la corrección no pasaba del 6 %.

Los registros son fotográficos. Para la fotografía de las deflexiones se utilizó el siguiente mecanismo: la parte del electrómetro sujeta a observación, o sea, el menisco, se iluminaba por transparencia y se agrandaba por medio de un microscopio óptico (aumento 40). Sobre una rendija colocada a la distancia focal y paralelamente al tubo capilar se desplazaba, perpendicularmente a aquélla, una placa fotográfica (38 × 10), con movimiento horizontal uniforme de 3,6 cm/min. Dado que la anchura de dicha rendija era 0,02 mm., el límite de resolución resultaba, aproximadamente, ser 0,03 seg., límite, naturalmente, establecido *a posteriori* como consecuencia del tiempo de respuesta del electrómetro, el cual se había comprobado era de ese orden (al descargar, por ejemplo, un condensador a través del mismo).

El aparato podrá apreciar, aunque no muy detalladamente y no siempre, el número de componentes de una variación de campo; sabido es que ciertas descargas se producen por etapas brevísimas, el transporte de cargas no es continuo, sino a borbotones. Resultados experimentales obtenidos por otros medios muestran que el intervalo entre dichas sacudidas varía entre 0,001 y 0,1 seg. aproximadamente; valores que, como vemos, rebasan las limitaciones impuestas por el aparato.

Por consiguiente, el instrumento es, en lo que se refiere a velocidad de registro, intermedio entre los procedimientos ordinarios para observaciones del gradiente de potencial en buen tiempo y los oscilográficos utilizados para un estudio detallado de las variaciones de campo en un intervalo breve. Los registros nos informan, pues, de ciertos acontecimientos que se perderían en los métodos anteriores.

Discusión

Los registros tienen la forma que aparece en figs. 5 y 6; no presentamos más que algunos casos particulares. Las descargas próximas originan una desviación repentina de la curva en un sentido o en otro, y convendremos en llamar cambios positivos de campo a aquellos que tienden a acrecentar el gradiente positivo de potencial (o normal, aire-tierra). La curva, después de la sacudida, no se mantiene, por lo general, sobre su nivel máximo alcanzado, como sería de esperar si el fenómeno se redujera a una simple transferencia de carga, sino que tiende a recuperar su valor primitivo, aunque no lo logre completamente a veces, según una ley de máximo interés que originó el apelativo de «curva de recobro». En otras palabras, contrariamente a lo que podía creerse, las cargas no se cancelan simplemente por el salto de una chispa o rayo en el interior de una nube (o de ésta a tierra, por ejemplo), y la curva invitaría a sospechar sigue, cuando menos en su origen—de ahí el interés del coeficiente angular en ese punto—la ley de separación de cargas o de regeneración de su distribución espacial.

Se puede también apreciar que el campo «medio» varía de una manera casi continua, que la influencia de las descargas sobre el gradiente junto al suelo tiene lugar según menómenos de compensación, en beneficio de la continuidad del contorno medio general; éste dibujará la evolución del campo electrostático en el punto de observaciónn, debido al movimiento de la nube cargada, más el debido a la formación, disipación o evolución de los centros de carga espacial. Hemos registrado algún cambio del orden de los 5.10^2 volts/m. en 15 segundos, lo cual es difícil creer se trate de un rayo (como corroboran los valores de duración obtenidos por Schonland, Mc Eachron, Stekolnikov, etc., y nosotros). Como, por otra parte, el acercamiento de una carga constante para producir un cambio tal supondría una velocidad de la nube realmente increíble, nos inclinamos a pensar se trate de la creación o disipación rápida de una centro de carga, sin intervención de fenómeno disruptivo alguno.

Algunos casos sugieren que la vida e historia eléctrica de la nube parecería pasar a obedecer factores o seguir acontecimientos que sospechamos pertenecen al orden termodinámico y mecánico de su evolución. La formación y disipación de cargas no debidas

a rayos es muy probable obedezca a agentes en este último sentido, y posiblemente acompañen, como consecuencia, simples movimientos verticales de los centros especiales de carga, cosa que haría variar el momento eléctrico, ligado, como sabemos, al gradiente de potencial por la relación (aproximada)

$$\frac{dV/dz}{2\,QH} = (H^2 + L^2)^{3/2}$$

donde H es la diferencia de alturas a que se halla la carga Q, y L la distancia de ésta al punto de observación. Este último caso sería comprobable (en un registro muy claro), habida cuenta de que los movimientos verticales de una gota de aire en el seno de la atmósfera son armónicos.

Si bien puede opinarse que una causa productora de variaciones de campo consiste simplemente en el traslado de una carga de un punto a otro a distinto nivel, sin necesidad de argumentar sobre la existencia de una polaridad establecida o de la cancelación de potenciales diferentes (hasta cierto límite), lo más plausible es que los cambios anteriormente señalados establezcan una diferenciación entre ambos procesos.

El examen de la primera parte de las curvas de recobro sugiere una ley de tipo exponencial; la parte inferior de las mismas debe ser función de las características del aparato. Veamos, siguiendo la pauta trazada por Wilson y Wormell, cómo se construye una imagen verosímil de este hecho. El campo, una vez efectuada la descarga, debe ser evidentemente muy pequeño en la zona afectada. Si la regeneración rápida del gradiente no tiene buena explicación por consideraciones eléctricas, sí parece tenerla por mecánicas: los elementos portadores de carga (iones) tienen tamaños típicamente diferentes, de acuerdo con su signo. La separación de cargas puede entonces ser de índole gravitatoria. La velocidad de regeneración sería entonces la de caída, amortiguada cada vez más por la acción del campo eléctrico que se engendra por momentos, y podrá escribirse en la forma

$$v = v_0 - kM = k(M_0 - M)$$

siendo M el momento eléctrico y v la velocidad de separación en el instante inicial. Aparte tenemos:

$$\frac{dM}{dt} = \frac{d\,(QH)}{dt} = Qv = kQ\,(M_0 - M)$$

La solución, con la condición inicial $M=0$ para $t=0$,

$$M = M_0(1 - e^{-kQt})$$

explicaría satisfactoriamente la forma.

Pero es sospechoso el hecho de que a veces una parte de la curva de recobro se halle interrumpida por cambios de campo de signo contrario al inmediato anterior.

Por último, si bien es verdad que el contorno general de las curvas, prescindiendo de aspectos particulares, ha de ofrecer una

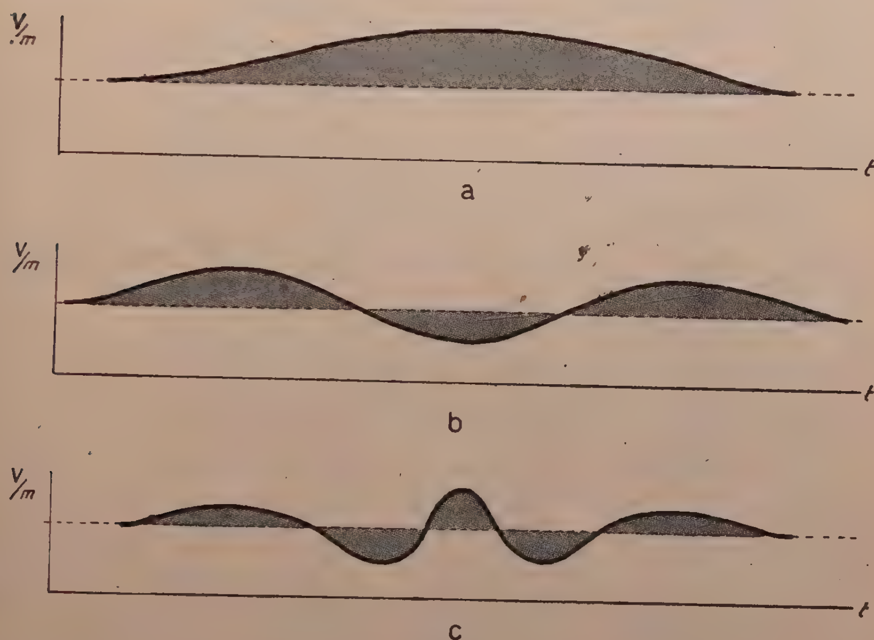


Figura 4

idea de la configuración eléctrica de la nube o de su polaridad, no ha sido posible aislar casos indiscutibles o prescindir de la ambigüedad provocada por la influencia de otras nubes próximas. Teóricamente, caso de que la nube contuviera una sola carga, la curva sería, en un intervalo largo, análoga a la de la fig. 4 (a); caso de ser bipolar, análoga a fig. 4 (b); caso de una distribución en forma de tres centros sobre la vertical, el interior de signo contrario al de los extremos, análoga a fig. 4 (c).

Como se ve, hay (en los últimos casos) unos radios de inversión sobre cuyos extremos los cambios de campo serían nulos.

El examen de ciertas curvas de corriente aire-tierra, registros continuos de campo, etc., obtenidos por varios autores, nos haría pensar que, contrariamente a la idea tan difundida de simplificar la imagen electrostática, la complicación de los registros no obedece sólo a la presencia de varias nubes simultáneas, sino que puede deberse a una distribución no sencilla de cargas. Por ejemplo, a la existencia de más de tres centros espaciales sobre la vertical, no distribuídos quizá regularmente y que incluso pueden tener una vida más o menos breve o accidentada; es decir, que la complejidad de los fenómenos es simultánea en el tiempo y en el espacio. Además, una distribución tal explicaría los casos de secuencia de descargas de distinto o mismo signo en intervalos breves de tiempo. También entonces la primera descarga que apareciera podría crear un campo superior al primitivo de ruptura entre otras regiones de la nube, y así sucesivamente generarse una secuencia progresiva de reajuste de tensión.

Expreso mi profundo agradecimiento al Dr. T. W. Wormell y a Mr. P. J. Pierce, a través de quienes adquirí valiosísimos conocimientos teóricos y prácticos sobre la materia. Al Profesor D. J. Baltá, bajo cuya dirección emprendí la tarea propuesta, por su celo y ayuda en la confección de este artículo. Al Director del S. P. Observatory, Profesor Stratton, y al Dr. Ratcliffe, del Cavendish Laboratory, por la cordial acogida que me proporcionaron, incorporándome al equipo donde tuve el honor y la satisfacción de realizar mis trabajos.

BIBLIOGRAFIA

C. T. R. Wilson: 1920, *Phil. Trans. A*, 221, 73.
T. W. Wormell: 1927, *Proc. Roy. Soc.* A, 115, 443.
C. T. Wilson: 1929, *J. Frank. Ins.*, 208, 1.
T. W. Wormell: 1930, *Proc. Roy Soc. A*, 127, 567.
B. F. J. Schonland, D. J. Malans & H. Colens: 1935, *Proc. Roy. Soc. A*, 152, 595.
E. V. Appleton & F. W. Chapman: 1937, *Proc. Roy. Soc A*, 158, 1.
G. C. Simpson & F. J. Scrase: 1937, *Proc. Roy. Soc. A*, 161, 309.
T. W. Wormell: 1939, *Phil. Trans. A*, 238, 249.
G. C. Simpson & G. D. Robinsonii 1941, *Proc. Roy. Soc. A*, 177, 281.
K. B. Mc Eachron & J. H. Hagenguth: 1942, *Tran. Amer. Ins. El. Engr.*, 61, 559.
F. R. Perry: 1944, *Quar. Jour. R. M. Soc.*, 70, 169.
G. D. Mc Cann: 1944, *Trans. Amer. Inst. El. Engr.*, 63, 1157
R. H. Golde: 1945, *B. E. A. I. R. A. R.*, 49, 10.
C. E. R. Bruce: 1945, *Proc. Roy. Soc. A.*, 183, 228.
J. M. Meek & F. R. Perry: 1946, *Rep. Proc. Phys.*, 10, 314.
J. M. Meek & R. F. Saxe: 1948, *Nat.* 162, 263.



Figura 5

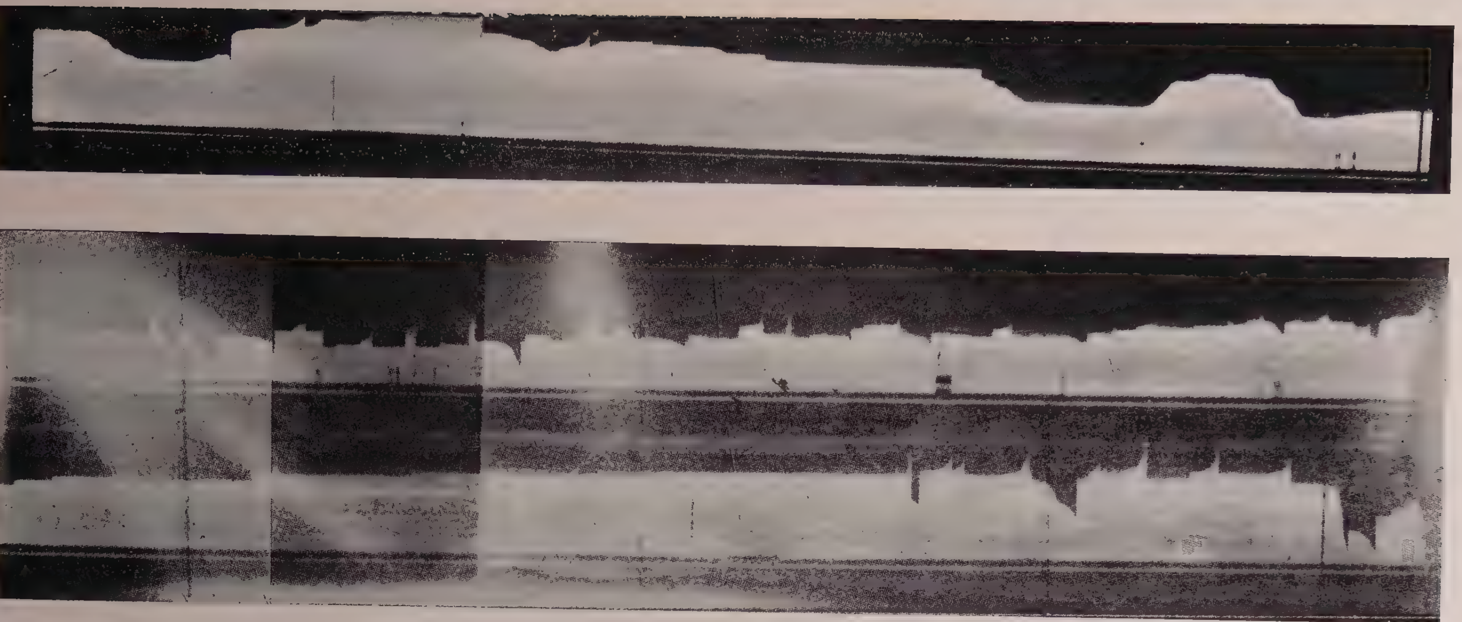


Figura 6

34. LAS ABERRACIONES DE 9.° ORDEN Y SU COMPARACION CON LAS DE ORDENES SUPERIORES, *por* C. MORAIS y M. EGÜES.

SUMMARY

In this article we calculate the 9.° order aberrations which are presented by a plain-parallel plate (or sheet) in the air, since they will be the same as those presented by any optical system.

Then a systematical study is made of such aberrations, by comparating then with those of inferior orders and by examining the aberration figure in the Gauss plane.

El método general para calcular las aberraciones mediante una lámina planoparalela en el aire ha sido estudiado por uno de nosotros y aplicado a los órdenes 3.°, 5.° y 7.° (*). Las tablas obtenidas por este procedimiento se reproducen en este trabajo (Tablas I, II, III).

Las fórmulas allí obtenidas para calcular las componentes de las aberraciones de r-ésimo orden son:

$$\Delta y_r = -\frac{a_r}{r+1} d \cdot \Sigma \frac{\left(\frac{r+1}{2}\right)!}{a!\, b!\, c!} u^a v^{b-1} z^{c-1} \left\{ 2\, bz \frac{k_1}{x_1} + 2\, cv \frac{h_1}{s_1} \cos\varphi \right\}$$

$$\Delta z_r = -\frac{a_r}{r+1} d \cdot \Sigma \frac{\left(\frac{r+1}{2}\right)!}{a!\, b!\, c!} 2\, cu^a v^b z^{c-1} \frac{h_1}{s_1} \operatorname{sen}\varphi \qquad [1]$$

en que

$$u = \frac{k_1^2}{x_1^2} \qquad v = 2\frac{k_1 h_1}{x_1 s_1}\cos\varphi \qquad z = \frac{h_1^2}{s_1^2} \qquad [2]$$

siendo (fig. 1):

k_1 = altura de intersección del rayo principal en la primera cara de la lámina.

(*) C. MORAIS: «Considerazioni sulle lastre piane e parallele». *Ottica*, 1943, número 3, y «Las aberraciones de 7.° orden», pendiente de publicación en estos ANALES.

h_1 = altura de intersección del rayo central en la primera cara de la lámina.
x_1 = distancia del diafragma desde la primera cara de la lámina.
s_1 = distancia del objeto desde la primera cara de la lámina.
φ = azimut del rayo.

En el caso particular del noveno orden.

$$a + b + c = \frac{r+1}{2} = 5 \tag{3}$$

dando valores a los parámetros a, b y c y escribiendo para simplificar

$$A = -\frac{35}{1\,280}\frac{(n^2-1)^4}{n^9}d \tag{4}$$

se obtiene la tabla IV.

Seguidamente se estudia cada una de las aberraciones de 9.° orden, comparándolas con las correspondientes de órdenes inferiores, en los casos en que ello ha sido posible, y dando la figura que cada una produce en su sección con el plano de Gauss. Esto es en definitiva lo que informa de una manera evidente, de la bondad de la imagen.

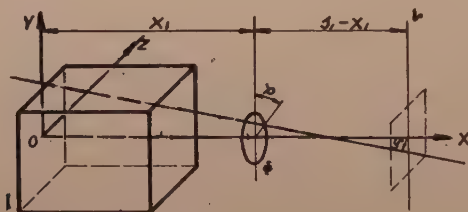


Figura 1

Aberración 1.ª—No existe ninguna aberración para $a=5$, $b=0$, $c=0$, como se deduce al ver que las dos componentes son nulas.

Aberración 2.ª—Las componentes de la aberración representada en el plano de Gauss son:

$$\Delta y = A \cdot 10 \frac{k_1{}^9}{x_1{}^9} \qquad [5$$

$$\Delta z = 0$$

3.er orden

TABLA I

$r = 3$ $a + b + c = 2$ $N = 5$

$a+b+c=2$	$\frac{\left(\frac{r+1}{2}\right)!}{a!\,b!\,c!}\, u^a v^{b-1} z^{c-1} \left\{ 2bz\frac{k_1}{x_1} + 2cv\frac{h_1}{s_1}\cos\varphi \right\}$	$\frac{\left(\frac{r+1}{2}\right)!}{a!\,b!\,c!}\, 2c \cdot u^a v^b z^{c-1} \frac{h_1}{s_1}\,\text{sen}\,\varphi$
$a=2;\quad b=0;\quad c=0$	$3\frac{u^2}{vz}(0+0) = \text{cero}$	cero
$a=1;\quad b=1;\quad c=0$	$4\frac{u}{z}\left(z\frac{k_1}{x_1}+0\right) = 4\frac{k_1^3}{x_1^3}$	cero
$a=1;\quad b=0;\quad c=1$	$4\frac{u}{v}\left(0+v\frac{h_1}{s_1}\cos\varphi\right) = 4\frac{k_1^2 h_1}{x_1^2 s_1}\cos\varphi$	$4u\frac{h_1}{s_1}\,\text{sen}\,\varphi = 4\frac{k_1^2 h_1}{x_1^2 s_1}\,\text{sen}\,2\varphi$
$a=0;\quad b=2;\quad c=0$	$2\frac{v}{z}\left(2z\frac{k_1}{x_1}+0\right) = 4\frac{k_1^2 h_1}{x_1^2 s_1}\cos\varphi$	cero
$a=0;\quad b=1;\quad c=1$	$4\left(z\frac{k_1}{x_1}+v\frac{h_1}{s_1}\cos\varphi\right) = 4\frac{k_1 h_1^2}{x_1 s_1^2}(1+2\cos^2\varphi)$	$2v\frac{h_1}{s_1}\,\text{sen}\,\varphi = 4\frac{k_1 h_1^2}{x_1 s_1^2}\,\text{sen}\,2\varphi$
$a=0;\quad b=0;\quad c=2$	$2\frac{z}{v}\left(0+2v\frac{h_1}{s_1}\cos\varphi\right) = 4\frac{h_1^3}{s_1^3}\cos\varphi$	$4z\frac{h_1}{s_1}\,\text{sen}\,\varphi = 4\frac{h_1^3}{s_1^3}\,\text{sen}\,\varphi$

5.° orden

TABLA II

$r = 5$ $a + b + c = 3$ N = 9

$a+b+c=2$	$\frac{\left(\frac{r+1}{2}\right)!}{a!\,b!\,c!}\,2\,u^a\,v^{b-1}\,z^{c-1}\left\{bz\frac{k_1}{x_1}+cv\frac{h_1}{s_1}\cos\varphi\right\}$	$\frac{\left(\frac{r+1}{2}\right)!}{a!\,b!\,c!}\,2\,cu^a\,v^b\,z^{c-1}\frac{h_1}{s_1}\operatorname{sen}\varphi$
$a=3;\ b=0;\ c=0$	$2\frac{u^3}{vz}(0+0)=$ cero	cero
$a=2;\ b=1;\ c=0$	$6\frac{u^2}{z}\left(z\frac{k_1}{x_1}+0\right)=6\frac{k_1^5}{x_1^5}$	cero
$a=2;\ b=0;\ c=1$	$6\frac{u^2}{v}\left(0+v\frac{h_1}{s_1}\cos\varphi\right)=6\frac{k_1^4h_1}{x_1^4s_1}\cos\varphi$	$6u^2\frac{h_1}{s_1}\operatorname{sen}\varphi=6\frac{k_1^4h_1}{x_1^4s_1}\operatorname{sen}\varphi$
$a=1;\ b=2;\ c=0$	$6\frac{uv}{z}\left(2z\frac{k_1}{x_1}+0\right)=24\frac{k_1^4h_1}{x_1^4s_1}\cos\varphi$	cero
$a=1;\ b=0;\ c=2$	$6\frac{uz}{v}\left(0+2v\frac{h_1}{s_1}\cos\varphi\right)=12\frac{k_1^2h_1^3}{x_1^2s_1^3}\cos\varphi$	$12uz\frac{h_1}{s_1}\operatorname{sen}\varphi=12\frac{k_1^2h_1^3}{x_1^2s_1^3}\operatorname{sen}\varphi$
$a=1;\ b=1;\ c=1$	$12u\left(z\frac{k_1}{x_1}+v\frac{h_1}{s_1}\cos\varphi\right)=12\frac{k_1^3h_1^2}{x_1^3s_1^2}(1+2\cos^2\varphi)$	$12uv\frac{h_1}{s_1}\operatorname{sen}\varphi=12\frac{k_1^3h_1^2}{x_1^3s_1^2}\operatorname{sen}2\varphi$
$a=0;\ b=3;\ c=0$	$2\frac{v^2}{z}\left(3z\frac{k_1}{x_1}+0\right)=24\frac{k_1^3h_1^2}{x_1^3s_1^2}\cos^2\varphi$	cero
$a=0;\ b=2;\ c=1$	$6v\left(2z\frac{k_1}{x_1}+v\frac{h_1}{s_1}\cos\varphi\right)=24\frac{k_1^2h_1^3}{x_1^2s_1^3}\cos\varphi(1+\cos^2\varphi)$	$6v^2\frac{h_1}{s_1}\operatorname{sen}\varphi=24\frac{k_1^2h_1^3}{x_1^2s_1^3}\cos^2\varphi\cdot\operatorname{sen}\varphi$
$a=0;\ b=1;\ c=2$	$6z\left(z\frac{k_1}{x_1}+2v\frac{h_1}{s_1}\cos\varphi\right)=6\frac{k_1h_1^4}{x_1s_1^4}(1+4\cos^2\varphi)$	$12vz\frac{h_1}{s_1}\operatorname{sen}\varphi=12\frac{k_1h_1^4}{x_1s_1^4}\operatorname{sen}2\varphi$
$a=0;\ b=0;\ c=3$	$2\frac{z^2}{v}\left(0+3v\frac{h_1}{s_1}\cos\varphi\right)=6\frac{h_1^5}{s_1^5}\cos\varphi$	$6z^2\frac{h_1}{s_1}\operatorname{sen}\varphi=6\frac{h_1^5}{s_1^5}\operatorname{sen}\varphi$

$r = 7$ $\qquad$ $a + b + c = 4$ $\qquad$ $N = 14$

$a+b+c=4$	$\frac{\left(\frac{r+1}{2}\right)!}{a!\,b!\,c!}\,2\,u^a v^{b-1} z^{c-1}\left\{bz\frac{k_1}{x_1}+cv\frac{h_1}{s_1}\cos\varphi\right\}$	$\frac{\left(\frac{r+1}{2}\right)!}{a!\,b!\,c!}\,2\,c\,.\,u^a v^b z^{c-1}\frac{h_1}{s_1}\operatorname{sen}\varphi$
$a=4;\ b=0;\ c=0$	$2\frac{u^4}{vz}(0+0)=$ cero	cero
$a=3;\ b=1;\ c=0$	$8\frac{u^2}{z}\left(z\frac{k_1}{x_1}+0\right)=\frac{k_1^7}{x_1^7}$	cero
$a=3;\ b=0;\ c=1$	$8\frac{u^3}{v}\left(0+v\frac{h_1}{s_1}\cos\varphi\right)=8\frac{k_1^6 h_1}{x_1^6 s_1}\cos\varphi$	$8u^3\frac{h_1}{s_1}\operatorname{sen}\varphi=8\frac{k_1^6 h_1}{x_1^6 s_1}\operatorname{sen}\varphi$
$a=2;\ b=2;\ c=0$	$12\frac{u^2 v}{z}\left(2z\frac{k_1}{x_1}+0\right)=48\frac{k_1^6 h_1}{x_1^6 s_1}\cos\varphi$	cero
$a=2;\ b=0;\ c=2$	$12\frac{u^2 z}{v}\left(0+2v\frac{h_1}{s_1}\cos\varphi\right)=24\frac{k_1^4 h_1^3}{x_1^4 h_1^3}\cos\varphi$	$24u^2 z\frac{h_1}{s_1}\operatorname{sen}\varphi=24\frac{k_1^4 h_1^3}{x_1^4 s_1^3}\operatorname{sen}\varphi$
$a=2;\ b=1,\ c=1$	$24u^2\left(z\frac{k_1}{x_1}+v\frac{h_1}{s_1}\cos\varphi\right)=24\frac{k_1^5 h_1^2}{x_1^5 s_1^2}(1+2\cos^2\varphi)$	$24u^2 v\frac{h_1}{s_1}\operatorname{sen}\varphi=24\frac{k_1^5 h_1^2}{x_1^5 s_1^2}\operatorname{sen}2\varphi$
$a=1;\ b=3;\ c=0$	$8\frac{uv^2}{z}\left(3z\frac{k_1}{x_1}+0\right)=96\frac{k_1^5 h_1^2}{x_1^5 s_1^2}$	cero
$a=1;\ b=2;\ c=1$	$24uv\left(2z\frac{k_1}{x_1}+v\frac{h_1}{s_1}\cos\varphi\right)=96\frac{k_1^4 h_1^3}{x_1^4 s_1^3}\cos\varphi(1+\cos^2\varphi)$	$24uv^2\frac{h_1}{s_1}\operatorname{sen}\varphi=96\frac{k_1^4 h_1^3}{x_1^4 s_1^3}\cos^2\varphi\cdot\operatorname{sen}\varphi$
$a=1;\ b=1;\ c=2$	$24uz\left(z\frac{k_1}{x_1}+2v\frac{h_1}{s_1}\cos\varphi\right)=24\frac{k_1^3 h_1^4}{x_1^3 s_1^4}(1+4\cos^2\varphi)$	$48uvz\frac{h_1}{s_1}\operatorname{sen}\varphi=48\frac{k_1^3 h_1^4}{x_1^3 s_1^4}\operatorname{sen}2\varphi$
$a=1;\ b=0;\ c=3$	$8\frac{uz^2}{v}\left(0+3v\frac{h_1}{s_1}\cos\varphi\right)=24\frac{k_1^2 h_1^5}{x_1^2 s_1^5}\cos\varphi$	$24uz^2\frac{h_1}{s_1}\operatorname{sen}\varphi=24\frac{k_1^2 h_1^5}{x_1^2 s_1^5}\operatorname{sen}\varphi$
$a=0;\ b=4;\ c=0$	$2\frac{v^3}{z}\left(4z\frac{k_1}{x_1}+0\right)=64\frac{k_1^4 h_1^3}{x_1^4 s_1^3}\cos^3\varphi$	cero
$a=0;\ b=3;\ c=1$	$8v^2\left(3z\frac{k_1}{x_1}+v\frac{h_1}{s_1}\cos\varphi\right)=96\frac{k_1^3 h_1^4}{x_1^3 s_1^4}\cos^2\varphi\left(1+\frac{2}{3}\cos^2\varphi\right)$	$8v^3\frac{h_1}{s_1}\operatorname{sen}\varphi=64\frac{k_1^3 h_1^4}{x_1^3 s_1^4}\cos^3\varphi\cdot\operatorname{sen}\varphi$
$a=0;\ b=2;\ c=2$	$12vz\left(2z\frac{k_1}{x_1}+2v\frac{h_1}{s_1}\cos\varphi\right)=48\frac{k_1^2 h_1^5}{x_1^2 s_1^5}\cos\varphi(1+2\cos^2\varphi)$	$24v^2 z\frac{h_1}{s_1}\operatorname{sen}\varphi=96\frac{k_1^2 h_1^5}{x_1^2 s_1^5}\cos^2\varphi\cdot\operatorname{sen}\varphi$
$a=0;\ b=1;\ c=3$	$2z^2\left(z\frac{k_1}{x_1}+2v\frac{h_1}{s_1}\cos\varphi\right)=8\frac{k_1 h_1^6}{x_1 s_1^6}(1+6\cos^2\varphi)$	$24vz^2\frac{h_1}{s_1}\operatorname{sen}\varphi=24\frac{k_1 h_1^6}{x_1 s_1^6}\operatorname{sen}2\varphi$
$a=0;\ b=0;\ c=4$	$2\frac{z^3}{v}\left(0+4v\frac{h_1}{s_1}\cos\varphi\right)=8\frac{h_1^7}{s_1^7}\cos\varphi$	$8z^3\frac{h_1}{s_1}\operatorname{sen}\varphi=8\frac{h_1^7}{s_1^7}\operatorname{sen}\varphi$

TABLA IV

$r = 9$ $a + b + c = 5$ N = 20

$a+b+c=5$	$\frac{\left(\frac{r+1}{2}\right)!}{a!\ b!\ c!}\ 2\, u^a v^{b-1} z^{c-1} \left\{ bz \frac{k_1}{x_1} + cv \frac{h_1}{s_1} \cos \varphi \right\}$	$\frac{\left(\frac{r+1}{2}\right)!}{a!\ b!\ c!}\ 2\, c u^a v^b z^{c-1} \frac{h^1}{s_1} \operatorname{sen} \varphi$
$a=5;\ b=0;\ c=0$	$2 \frac{u^5}{vz} (0+0) = \text{cero}$	cero
$a=4;\ b=1;\ c=0$	$5 \cdot 2 \frac{u^4}{z} \left(z \frac{k_1}{x_1} + 0\right) = 10 \frac{k_1^9}{x_1^9}$	cero
$a=4;\ b=0;\ c=1$	$5 \cdot 2 \frac{u^4}{v} \left(0 + v \frac{h_1}{s_1} \cos \varphi\right) = 10 \frac{k_1^8 h_1}{x_1^8 s_1} \cos \varphi$	$5 \cdot 2 \cdot u^4 \frac{h_1}{s_1} \operatorname{sen} \varphi = 10 \frac{k_1^8 h_1}{x_1^8 s_1} \operatorname{sen} \varphi$
$a=3;\ b=2;\ c=0$	$10 \cdot 2 \frac{u^3 v}{z} \left(2z \frac{k_1}{x_1} + 0\right) = 80 \frac{k_1^8 h_1}{x_1^8 s_1} \cos \varphi$	cero
$a=3;\ b=0;\ c=2$	$10 \cdot 2 \frac{u^3 z}{v} \left(0 + 2v \frac{h_1}{s_1} \cos \varphi\right) = 40 \frac{k_1^6 h_1^3}{x_1^6 s_1^3} \cos \varphi$	$10 \cdot 2 \cdot 2 u^3 z \frac{h_1}{s_1} \operatorname{sen} \varphi = 40 \frac{k_1^6 h_1^3}{x_1^6 s_1^3} \cos \varphi$
$a=3;\ b=1;\ c=1$	$20 \cdot 2 \cdot u^3 \left(z \frac{k_1}{x_1} + v \frac{h_1}{s_1} \cos \varphi\right) = 40 \frac{k_1^7 h_1^2}{x_1^7 s_1^2} (1 + 2 \cos^2 \varphi)$	$20 \cdot 2 \cdot u^3 v \frac{h_1}{s_1} \operatorname{sen} \varphi = 40 \frac{k_1^7 h_1^2}{x_1^7 s_1^2} \operatorname{sen} 2\varphi$
$a=2;\ b=3;\ c=0$	$10 \cdot 2 \frac{u^2 v^2}{z} \left(3z \frac{k_1}{x_1} + 0\right) = 240 \cdot \frac{k_1^7 x_1^2}{x_1^7 s_1^2} \cos^2 \varphi$	cero
$a=2;\ b=0;\ c=3$	$10 \cdot 2 \frac{u^2 z^2}{v} \left(0 + 3v \frac{h_1}{s_1} \cos \varphi\right) = 60 \frac{k_1^4 h_1^5}{x_1^4 s_1^5} \cos \varphi$	$10 \cdot 2 \cdot 3 u^2 \cdot z^2 \frac{h_1}{s_1} \operatorname{sen} \varphi = 60 \frac{k_1^4 h_1^5}{x_1^4 s_1^5} \operatorname{sen} \varphi$
$a=2;\ b=2;\ c=1$	$30 \cdot 2 \cdot u^2 v \left(2z \frac{k_1}{x_1} + v \frac{h_1}{s_1} \cos \varphi\right) = 240 \frac{k_1^6 h_1^3}{x_1^6 s_1^3} \cos \varphi (1 + \cos^2 \varphi)$	$30 \cdot 2 \cdot u^3 \cdot v^2 \frac{h_1}{s_1} \operatorname{sen} \varphi = 240 \frac{k_1^6 h_1^3}{x_1^6 s_1^3} \cos^2 \varphi \cdot \operatorname{sen} \varphi$

$$a = 2;\quad b = 1;\quad c = 2 \qquad 30 \cdot 2\ u^2 z \left(z \frac{k_1}{x_1} + 2 v \frac{h_1}{s_1} \cos\varphi \right) = 60 \frac{k_1^5 h_1^4}{x_1^5 s_1^4} (1 + 4 \cos^2\varphi) \qquad 30 \cdot 2 \cdot 2 \cdot u^2 v z \frac{h_1}{s_1} \operatorname{sen}\varphi = 120 \frac{k_1^5 h_1^4}{x_1^5 s_1^4} \operatorname{sen} 2\varphi$$

$$a = 1;\quad b = 4;\quad c = 0 \qquad 5 \cdot 2 \cdot \frac{u v^3}{z} \left(4 z \frac{k_1}{x_1} + 0 \right) = 320 \frac{k_1^6 h_1^3}{x_1^6 s_1^3} \cos^3\varphi \qquad \text{cero}$$

$$a = 1;\quad b = 0;\quad c = 4 \qquad 5 \cdot 2 \frac{u z^3}{v} \left(0 + 4 v \frac{h_1}{s_1} \cos\varphi \right) = 40 \frac{k_1^2 h_1^7}{x_1^2 s_1^7} \cos\varphi \qquad 5 \cdot 2 \cdot 4 \cdot u \cdot z^3 \frac{h_1}{s_1} \operatorname{sen}\varphi = 40 \frac{k_1^2 h_1^7}{x_1^2 s_1^7} \operatorname{sen}\varphi$$

$$a = 1;\quad b = 3;\quad c = 1 \qquad 20 \cdot 2 \cdot u v^2 \left(3 z \frac{k_1}{x_1} + v \frac{h_1}{s_1} \cos\varphi \right) = 480 \frac{k_1^5 h_1^4}{x_1^5 s_1^4} \cos^2\varphi \left(1 + \frac{2}{3} \cos^2\varphi \right) \qquad 20 \cdot 2 \cdot u v^3 \frac{h_1}{s_1} \operatorname{sen}\varphi = 320 \frac{k_1^5 h_1^4}{x_1^5 s_1^4} \cos^3\varphi \cdot \operatorname{sen}\varphi$$

$$a = 1;\quad b = 1;\quad c = 3 \qquad 20 \cdot 2 \cdot u z^2 \left(z \frac{k_1}{x_1} + 3 v \frac{h_1}{s_1} \cos\varphi \right) = 40 \frac{k_1^3 h_1^6}{x_1^3 s_1^6} (1 + 6 \cos^2\varphi) \qquad 20 \cdot 2 \cdot 3\ u v z^2 \frac{h_1}{s_1} \operatorname{sen}\varphi = 120 \frac{k_1^3 h_1^6}{x_1^3 s_1^6} \operatorname{sen} 2\varphi$$

$$a = 1;\quad b = 2;\quad c = 2 \qquad 30 \cdot 2 \cdot u v z \left(2 z \frac{k_1}{x_1} + 2 v \frac{h_1}{s_1} \cos\varphi \right) = 240 \frac{k_1^4 h_1^5}{x_1^4 s_1^5} \cos\varphi (1 + 2 \cos^2\varphi) \qquad 30 \cdot 2 \cdot 2 \cdot u v^2 z \frac{h_1}{s_1} \operatorname{sen}\varphi = 480 \frac{k_1^4 h_1^5}{x_1^4 s_1^5} \cos^2\varphi \cdot \operatorname{sen}\varphi$$

$$a = 0;\quad b = 1;\quad c = 4 \qquad 5 \cdot 2 \cdot z^3 \left(z \frac{k_1}{x_1} + 4 v \frac{h_1}{s_1} \cos\varphi \right) = 10 \frac{k_1 h_1^8}{x_1 s_1^8} (1 + 8 \cos^2\varphi) \qquad 5 \cdot 2 \cdot 4\ v z^3 \frac{h_1}{s_1} \operatorname{sen}\varphi = 40 \frac{k_1 h_1^8}{x_1 s_1^8} \operatorname{sen} 2\varphi$$

$$a = 0;\quad b = 4;\quad c = 1 \qquad 5 \cdot 2 \cdot v^3 \left(4 z \frac{k_1}{x_1} + v \frac{h_1}{s_1} \cos\varphi \right) = 320 \frac{k_1^4 h_1^5}{x_1^4 s_1^5} \cos^3\varphi \left(1 + \frac{1}{2} \cos^2\varphi \right) \qquad 5 \cdot 2 \cdot v^4 \frac{h_1}{s_1} \operatorname{sen}\varphi = 160 \frac{k_1^4 h_1^5}{x_1^4 h_1^5} \cos^4\varphi \cdot \operatorname{sen}\varphi$$

$$a = 0;\quad b = 5;\quad c = 0 \qquad 2 \frac{v^4}{z} \left(5 z \frac{k_1}{x_1} + 0 \right) = 160 \frac{k_1^5 h_1^4}{x_1^5 s_1^4} \cos^4\varphi \qquad \text{cero}$$

$$a = 0;\quad b = 2;\quad c = 3 \qquad 10 \cdot 2 \cdot v z^2 \left(2 z \frac{k_1}{x_1} + 3 v \frac{h_1}{s_1} \cos\varphi \right) = 80 \frac{k_1^2 h_1^7}{x_1^2 s_1^7} \cos\varphi (1 + 3 \cos^2\varphi) \qquad 10 \cdot 2 \cdot 3 \cdot v^2 z^2 \frac{h_1}{s_1} \operatorname{sen}\varphi = 240 \frac{k_1^2 h_1^7}{x_1^2 s_1^7} \cos^2\varphi \cdot \operatorname{sen}\varphi$$

$$a = 0;\quad b = 3;\quad c = 2 \qquad 10 \cdot 2 \cdot v^2 z \left(3 z \frac{k_1}{x_1} + 2 v \frac{h_1}{s_1} \cos\varphi \right) = 240 \frac{k_1^3 h_1^6}{x_1^3 s_1^6} \cos^2\varphi \left(1 + \frac{4}{3} \cos^2\varphi \right) \qquad 5 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot v^3 z \frac{h_1}{s_1} \operatorname{sen}\varphi = 480 \frac{k_1^3 h_1^6}{x_1^3 s_1^6} \cos^3\varphi \cdot \operatorname{sen}\varphi$$

$$a = 0;\quad b = 0;\quad c = 5 \qquad 2 \frac{z^4}{v} \left(0 + 5 v \frac{h_1}{s_1} \cos\varphi \right) = 10 \frac{h_1}{s_1} \cos\varphi \qquad 2 \cdot 5 \cdot z^4 \frac{h_1}{s_1} \operatorname{sen}\varphi = 10 \frac{h_1}{s_1} \operatorname{sen}\varphi$$

Esta aberración, que no tiene componente sagital y cuya componente meridional varía con la 9.ª potencia del campo, es la distorsión de 9.° orden, comparable con las distorsiones de los órdenes precedentes.

Aberraciones 3.ª y 4.ª—Estas aberraciones son idénticas y, por consiguiente, pueden sumarse quedando como componentes:

$$\Delta y = \mathrm{A} \cdot 90 \frac{k_1^8 h_1}{x_1^8 s_1} \cos \varphi$$
$$\Delta z = \mathrm{A} \cdot 10 \frac{k_1^8 h_1}{x_1^8 s_1} \operatorname{sen} \varphi \qquad [6]$$

Esta aberración, que varía con la 8.ª potencia del campo y la 1.ª potencia de la apertura, tiene una componente meridional sobre el plano de Gauss que es nueve veces mayor que la componente sagital.

Manteniendo constantes el campo y la apertura del sistema y haciendo variar el ángulo φ de 0° a 360° se obtendrán las figuras de aberración que determina el rayo refractado sobre el plano de Gauss cuando el rayo incidente recorre el borde del diafragma.

Poniendo:

$$a = \mathrm{A} \cdot 10 \frac{k_1^8 h_1}{x_1^8 s_1} \qquad [7]$$

en las anteriores ecuaciones, se llega a:

$$\Delta y = 9a \cos \varphi$$
$$\Delta z = a \operatorname{sen} \varphi \qquad [8]$$

y de aquí

$$\frac{\overline{\Delta y}^2}{81\, a^2} + \frac{\overline{\Delta z}^2}{x_1^2} = 1 \qquad [9]$$

Por consiguiente, las curvas de aberración en el plano de Gauss son elipses cuyo diámetro es nueve veces el diámetro menor.

Los rayos meridionales, para los cuales $\varphi = 0$, encuentran al rayo principal a una distancia del plano de Gauss

$$\frac{\Delta y}{\frac{h_1}{s_1}} = 90\, \mathrm{A} \frac{k_1^8}{x_1^8} \qquad \text{(foco meridional)}$$

mientras los rayos sagitales, para los cuales $\varphi = 90°$, encuentran al rayo principal a una distancia del plano de Gauss

$$\frac{\Delta z}{\frac{h_1}{s_1}} = 10\,A\,\frac{k_1^8}{x_1^8} \qquad \text{(foco sagital)}$$

Esta aberración es el astigmatismo de 9.° orden.

Examinada esta aberración se puede observar que tiene dos ejes de simetría. Comparándola con las aberraciones de los órdenes precedentes, se ve que en todos existe una aberración de este tipo, con la salvedad de que en las elipses va disminuyendo uno de los ejes a medida que aumenta el orden de la aberración, es decir, se van aproximando a la recta.

Aberración 5.ª—Aquí se encuentra una aberración cuyas componentes en el plano de Gauss son:

$$\Delta y = A \cdot 40\,\frac{k_1^6\,h_1^3}{x_1^6\,s_1^3}\cos\varphi$$
$$\Delta z = A \cdot 40\,\frac{k_1^6\,h_1^3}{x_1^6\,s_1^3}\operatorname{sen}\varphi \qquad [10]$$

Las curvas de aberración son circunferencias de radio

$$R = A \cdot 40\,\frac{k_1^6\,h_1^3}{x_1^6\,s_1^3} \qquad [11]$$

Presenta, por lo tanto, infinitos ejes de simetría y no solamente dos como presentaba el astigmatismo. El aspecto es parecido al de la aberración esférico de 3.er orden, ya que, como aquélla, goza de simetría de revolución en torno al eje principal, pero en vez de ser constante para todo el campo, como ocurre en la esférica, varía con la 6.ª potencia del mismo para una apertura constante.

Por todo lo dicho llamaremos a esta aberración aberración esférica de campo, y ya se verá cómo a continuación aparecen otras del mismo tipo.

Aberración 6.ª—Las componentes de esta aberración son:

$$\Delta y = A \cdot 40\,\frac{k_1^7\,h_1^2}{x_1^7\,s_1^2}\,(1 + 2\cos^2\varphi)$$
$$\Delta z = A \cdot 40\,\frac{k_1^7\,h_1^2}{x_1^7\,s_1^2}\operatorname{sen} 2\varphi \qquad [12]$$

Pongamos para simplificar:

$$a = A \cdot 40 \frac{k_1^7 h_1^2}{x_1^7 s_1^2} \qquad [13]$$

Recordando que es

$$1+2\cos^2\varphi = 2+\cos 2\varphi$$

resultará, finalmente, que las componentes de la aberración vendrán expresadas por:

$$\begin{aligned} \Delta y &= 2a + a \cdot \cos 2\varphi \\ \Delta z &= a \cdot \text{sen}\, 2\varphi \end{aligned} \qquad [14]$$

Y de aquí se obtiene:

$$(\Delta y - 2a) + \overline{\Delta z}^2 = a^2 \qquad [15]$$

Esto significa que las figuras de aberración en el plano de Gauss son circunferencias de radio

$$R = A \cdot 40 \frac{k_1^7 h_1^2}{x_1^7 s_1^2} \qquad [16]$$

que varía con el cuadrado de la apertura y la 7.ª potencia del campo, y cuyo centro está desplazado $2a$ respecto de la imagen ideal.

Para calcular el punto de intersección de los rayos meridionales con la circunferencia de radio R habrá que poner en [14] $\varphi=0$; con esto se obtiene:

$$\begin{aligned} \Delta y &= 3a \\ \Delta z &= 0 \end{aligned}$$

mientras que si se quiere el punto de intersección de los rayos sagitales con dicho círculo habrá que hacer en las expresiones (14) $\varphi=90°$. En este caso:

$$\begin{aligned} \Delta y &= a \\ \Delta z &= 0 \end{aligned}$$

La figura de aberración está, por tanto, constituída por un conjunto de circunferencias cuyo centro se desplaza sobre una recta y cuya envolvente es fácil determinar (fig. 2). Para ello se deriva la ecuación general de las circunferencias y se elimina el parámetro

entre esta ecuación y su derivada. Se trata, pues, de eliminar el parámetro a de la ecuación [15]. Derivando

$$-2(\Delta y - 2a) = a$$

De aquí

$$a = \frac{2}{3}\Delta y$$

Y sustituyendo en [15] se obtiene para la envolvente:

$$\overline{\Delta z}^2 - \frac{3}{9}\overline{\Delta y}^2 = 0$$

o lo que es igual

$$\left(\Delta z - \frac{\sqrt{3}}{3}\Delta y\right)\left(\Delta z + \frac{\sqrt{3}}{3}\Delta y\right) = 0$$

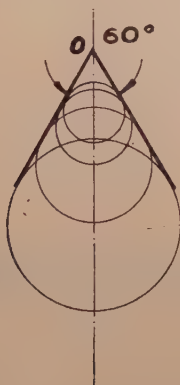


Figura 2

Por consiguiente, la envolvente está constituída por dos rectas cuyas ecuaciones son:

$$\Delta z = +\frac{\sqrt{3}}{3}\Delta y$$
$$\Delta z = -\frac{\sqrt{3}}{3}\Delta y \qquad [17]$$

Estas rectas forman entre sí un ángulo de 60°.

Se puede, pues, llegar a la conclusión de que esta aberración es análogo al coma de 3.er orden, con la única diferencia de que en el 3.er orden los radios de las circunferencias variaban con la 1.ª potencia del campo y el cuadrado de la apertura, mientras que aquí

varían con la 7.ª potencia del campo y el cuadrado de la apertura. En el 5.° y el 7.° orden también aparecen aberraciones análogas a ésta. Se la puede llamar defecto comático de 9.° orden.

Aberración 7.ª—Esta aberración tiene por componentes:

$$\Delta y = A \cdot 240 \frac{k_1^7 h_1^2}{x_1^7 s_1^2} \cos^2 \varphi \qquad [18]$$
$$\Delta z = 0$$

Por consiguiente, es una aberración que carece de componente sagital, reduciéndose a un segmento que, para un campo y una apertura constantes es recorrido cuatro veces por el rayo, mientras φ varía de 0 a 360°.

Si se trata de determinar el efecto de esta aberración basta considerar un segmento horizontal sobre el plano objeto. Los rayos

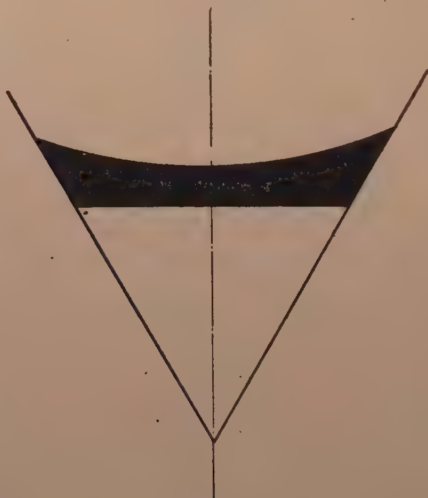


Figura 3

sagitales no estarán afectados por esta aberración, mientras los meridionales sí lo estarán.

Suponiendo la apertura y el azimut constantes, es decir:

$$a = A \cdot 240 \frac{h_1^2}{s_1^2} \cos^2 \varphi = \text{const}$$

quedan las componentes de la forma

$$\Delta y = a \frac{k_1^7}{x_1^7} \qquad \Delta z = 0 \qquad [19]$$

Es decir, que esta aberración es del tipo de la distorsión. Por consiguiente, la imagen del segmento rectilíneo situado en el plano objeto vendrá dada en el plano de Gauss por un área (fig. 3) limitada por un segmento rectilíneo, que es la imagen sagital, y por un segmento de curva que corresponderá a los valores respectivos del azimut y la apertura

$$\varphi = 0 \qquad \varphi = 180^{\circ}$$
$$h_1 = h_{MX}$$

Será, por consiguiente, una distorsión comática de 9.º orden, análoga a las que se presentan en el 3.er y 5.º orden.

Aberración 8.ª—Esta aberración tiene por componentes
5.ª Tiene por componentes:

$$\Delta y = A \cdot 60 \frac{k_1^4 h_1^5}{x_1^4 s_1^5} \cos \varphi \qquad \Delta z = A \cdot 60 \frac{k_1^4 h_1^5}{x_1^4 s_1^5} \operatorname{sen} \varphi \qquad [20]$$

Sus curvas de aberración son, por consiguiente, en el plano de Gauss, circunferencias cuyo radio varía con la 4.ª potencia del campo y la 5.ª de la apertura, siendo expresado por

$$R = A \cdot 60 \frac{k_1^4 h_1^5}{x_1^4 s_1^5}$$

Como tiene infinitos planos de simetría, se podrá decir que se trata de una esférica de campo.

Aberración 9.ª—Esta aberración tiene por compontes

$$\Delta y = A \cdot 240 \frac{k_1^6 h_1^3}{x_1^6 s_1^3} \cos \varphi (1 + \cos^2 \varphi) \qquad \Delta z = A \cdot 240 \frac{k_1^6 h_1^3}{x_1^6 s_1^3} \cos^2 \varphi \operatorname{sen} \varphi \qquad [21]$$

Para ver qué aspecto presenta esta figura de aberración es conveniente observar cómo varía el punto de intersección de los rayos con el plano de Gauss al variar el azimut.

Sean dos rayos meridionales, 1 y 2, que corresponden a $\varphi=0$, $\varphi=180^\circ$, que pasan por el borde de la pupila (fig. 4). Estos rayos encontrarán el plano de Gauss en los puntos T_1 y T_2 de coordenadas

$$\Delta y_{T_1} = - \Delta y_{T_2} = 2\,a$$

$$\Delta z_{T_1} = \Delta z_{T_2} = 0$$

donde es:

$$a = A \cdot 240 \frac{k_1^6\, h_1^3}{x_1^6\, s_1^3}$$

Los dos rayos sagitales 3 y 4 correspondientes a $\varphi=90^\circ$ y $\varphi=270^\circ$ encontrarán al plano de Gauss en la imagen ideal 0.

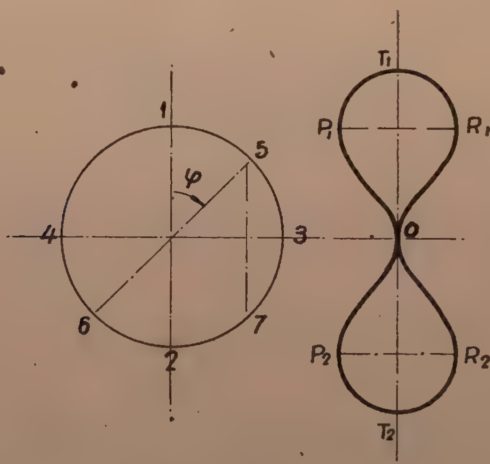


Figura 4

Dos rayos, por ejemplo 5 y 6, que encuentran a la pupila en los extremos de un diámetro, y, por lo tanto, que corresponden a los valores

$$\varphi \qquad 180^\circ + \varphi$$

encontrarán al plano de Gauss en puntos R_1 y P_2, cuyas coordenadas serán iguales y de signo contrario, es decir,

$$\Delta y_\varphi = - \Delta y_{180+\varphi}$$

$$\Delta z_\varphi = - \Delta z_{180+\varphi}$$

Dos rayos que encuentren la pupila de entrada en los extremos de una cuerda vertical 5 y 7 correspondientes a los valores

$$\varphi \qquad 180° - \varphi$$

encontrarán al plano de Gauss en puntos R_1 y R_2, cuyas ordenadas son iguales y de signo contrario, mientras las abscisas son iguales en magnitud y signo

$$\Delta y_\varphi = - \Delta y_{180-\varphi}$$

$$\Delta z_\varphi = \Delta z_{180-\varphi}$$

Finalmente, dos puntos que encuentran la pupila de entrada en puntos 6 y 7, situados en los extremos de una cuerda horizontal y, por lo tanto, que corresponden a

$$+\varphi \qquad -\varphi$$

encontrarán al plano de Gauss en puntos P_2 y R_2, cuyas coordenadas son iguales en magnitud y signo, mientras las abscisas son iguales y de signo contrario

$$\Delta y_\varphi = \Delta y_{-\varphi}$$

$$\Delta z_\varphi = - \Delta z_{-\varphi}$$

Se trata de una aberración de ocho, análoga a las que se encuentran en el 5.° y 7.° orden.

Aberración 10.ª—Escribiendo las componentes de esta aberración son:

$$\Delta y = A \cdot 60 \frac{k_1^5 h_1^4}{x_1^5 s_1^4} (1 + 4 \cos^2 \varphi)$$

$$\Delta z = A \cdot 120 \frac{k_1^5 h_1^4}{x_1^5 s_1^4} \operatorname{sen} 2\varphi \qquad [22]$$

Análogamente a lo que se ha hecho en la aberración 6.ª, se hace aquí para simplificar la escritura

$$a = A \cdot 60 \frac{k_1^5 h_1^4}{x_1^5 s_1^4} \qquad [23]$$

En este caso se tendrá:

$$\begin{aligned} \Delta y &= a(3+2 \cos 2\varphi) = 3a + 2a \cdot \cos 2\varphi \\ \Delta z &= 2a \text{ sen } 2\varphi \end{aligned} \qquad [24]$$

De aquí se deduce inmediatamente que las figuras de aberración serán circunferencias cuya ecuación general es:

$$(\Delta y - 3a)^2 + \overline{\Delta z}^2 = 4a \qquad [25]$$

Es decir, se trata de circunferencias cuyo centro está desplazado $3a$ de la imagen ideal y cuyo radio variará con la 5.ª potencia del campo y la 4.ª de la apertura:

$$R = 2 A \cdot 60 \frac{k_1^5 h_1^4}{x_1^5 s_1^4} \qquad [26]$$

Los rayos meridionales ($\varphi=0$, $\varphi=180°$) encontrarán a estas circunferencias en puntos de coordenadas

$$\begin{aligned} \Delta y &= 5a \\ \Delta z &= 0 \end{aligned}$$

mientras los sagitales ($\varphi=90°$, $\varphi=270°$) las encuentran en puntos de coordenadas

$$\begin{aligned} \Delta y &= a \\ \Delta z &= 0 \end{aligned}$$

Si se trata de obtener la ecuación de la envolvente de estas circunferencias, después de hechos los cálculos oportunos queda de la forma

$$\overline{\Delta z}^2 - \tfrac{4}{5} \overline{\Delta y}^2 = 0$$

o, lo que es lo mismo,

$$\left(\Delta z - \frac{2}{\sqrt{5}} \Delta y\right)\left(\Delta z + \frac{2}{\sqrt{5}} \Delta y\right) = 0$$

Luego la envolvente está constituída por dos rectas cuyas ecuaciones respectivas son :

$$\Delta z = + \frac{2}{\sqrt{5}} \Delta y$$
$$\Delta z = - \frac{2}{\sqrt{5}} \Delta y \qquad [27]$$

El ángulo que forman entre sí estas dos rectas es de 83°37′16″ (fig. 5). Se ve, por lo tanto, que esta aberración tiene su análoga en el 5.° y 7.° orden. Comparándola con la aberración 6.ª puede verse inmediatamente que tiene una semejanza completa con ella, sin más diferencia que presentar ésta un ángulo mayor en las rectas que forman la envolvente. Se trata, por tanto, de un defecto comático de 9.° orden.

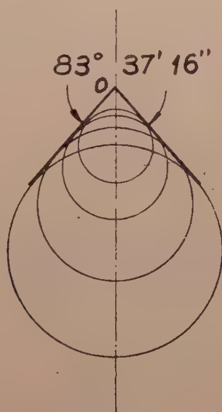


Figura 5

Aberración 11.ª—Aquí aparece una aberración de componentes

$$\Delta y = \mathrm{A} \cdot 60 \frac{k_1^6 h_1^3}{x_1^6 s_1^3} \cos^3 \varphi$$
$$\Delta z = 0 \qquad [28]$$

Como en el caso de la aberración 7.ª, se ve que esta aberración carece de componente sagital, reduciéndose también a un segmento que en este caso es recorrido dos veces por el rayo mientras φ varía de 0° a 360°, supuestos campo y apertura constantes.

Considerando un segmento rectilíneo horizontal sobre el plano objeto, los rayos sagitales no estarán afectados por esta aberración mientras los meridionales sí lo estarán.

Suponiendo constantes la apertura y el azimut

$$a = A \cdot 60 \frac{h_1^3}{s_1^3} \cos^3 \varphi = \text{const}$$

quedan las componentes de la forma:

$$\Delta y = a \frac{k_1^6}{x_1^5} \qquad [29]$$
$$\Delta z = 0$$

y, por lo tanto, queda una aberración del tipo de la distorsión. Por consiguiente, la imagen de un segmento rectilíneo en el plano de Gauss estará constituído por un área (fig. 6) limitada por dos

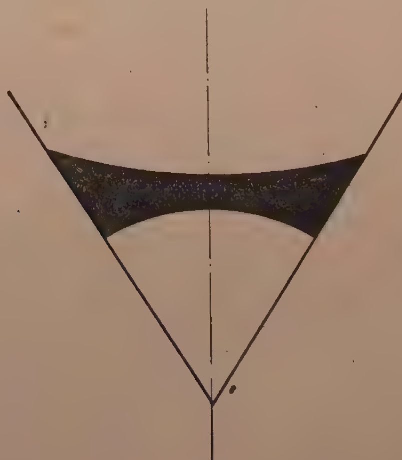


Figura 6

segmentos curvilíneos formados por las imágenes meridionales correspondientes a los valores

$$\varphi = 0 \qquad h_1 = h_{MX}$$

y

$$\varphi = 180° \qquad h_1 = h_{MX}$$

Esta aberración, que se presenta ya en el 7.º orden, es una distorsión comática.

Aberración 12.ª—Esta aberración presenta como componentes:

$$\Delta y = A \cdot 40 \frac{k_1^2 h_1^7}{x_1^2 s_1^7} \cos \varphi$$
$$\Delta z = A \cdot 40 \frac{k_1^2 h_1^7}{x_1^2 s_1^7} \operatorname{sen} \varphi \qquad [30]$$

Como en los casos de las aberraciones 5.ª y 8.ª se presenta aquí una aberración que tiene infinitos planos de simetría y es, por lo tanto, del tipo de la aberración esférica, siempre que se considere el campo constante.

Las curvas de aberración en el plano de Gauss son circunferencias cuyo radio varía con la 2.ª potencia del campo y la 7.ª de la apertura y se expresa por:

$$R = A \cdot 40 \frac{k_1^2 h_1^7}{x_1^2 s_1^7} \qquad [31]$$

Es otra aberración esférica de campo.

Aberración 13.ª—Si se trata de estudiar esta aberración se verá que tiene por componentes:

$$\Delta y = A \cdot 480 \frac{k_1^5 h_1^4}{x_1^5 s_1^4} \cos^2 \varphi \left(1 + \frac{2}{3} \cos^2 \varphi\right)$$
$$\Delta z = A \cdot 320 \frac{k_1^5 h_1^4}{x_1^5 s_1^4} \cos^3 \varphi \cdot \operatorname{sen} \varphi \qquad [32]$$

Como en el caso de la aberración 9.ª, para estudiar la figura de esta aberración es conveniente observar cómo varía el punto de intersección de los rayos con el plano de Gauss al variar el azimut (fig. 7).

Sean dos rayos meridionales 1 y 2, que corresponden a $\varphi = 0$ y $\varphi = 180°$, respectivamente. Estos rayos encontrarán al piano de Gauss en puntos T_1 y T_2 de coordenadas:

$$\Delta y_{T_1} = \Delta y_{T_2} = \frac{5}{2} a$$

$$\Delta z_{T_1} = \Delta z_{T_2} = 0$$

donde:

$$a = A \cdot 480 \frac{k_1^5 h_1^4}{x_1^5 s_1^4}$$

Por consiguiente, T_1 y T_2 coinciden.

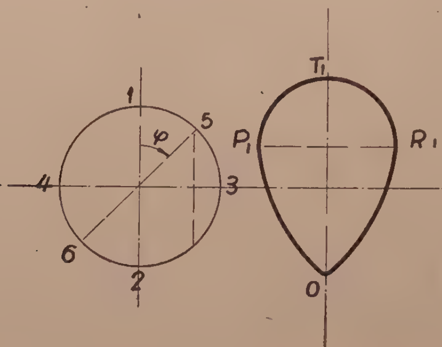


Figura 7

A su vez, los rayos sagitales 3 y 4, que corresponden a $\varphi = 90°$ y $\varphi = 270°$, encontrarán al plano de Gauss en puntos 0_1 y 0_2 de coordenadas

$$\Delta y_{0_1} = \Delta y_{0_2} = 0$$
$$\Delta z_{0_1} = \Delta y_{0_2} = 0$$

Es decir, que también se verifica que $0_1 = 0_2 = 0$.

Dos rayos 5 y 7 que encuentren la pupila de entrada en los extremos de una cuerda vertical y que corresponden, por consiguiente, a los ángulos

$$\varphi \qquad 180° - \varphi$$

encontrarán al plano de Gauss en dos puntos R_1 y P_1 de coordenadas

$$\Delta y_\varphi = \Delta y_{180-\varphi}$$
$$\Delta z_\varphi = - \Delta z_{180-\varphi}$$

Dos rayos 5 y 6 que encuentren la pupila de entrada en los extremos de un diámetro y que corresponden a los ángulos

$$\varphi \qquad 180° + \varphi$$

encontrarán el plano de Gauss en un mismo punto, ya que

$$\Delta y_{\varphi} = \Delta y_{180+\varphi}$$
$$\Delta z_{\varphi} = \Delta z_{180+\varphi}$$

Finalmente, dos rayos, 6 y 7, que encuentran la pupila de entrada en los extremos de una cuerda horizontal y que corresponden, por tanto, a los ángulos

$$\varphi \qquad -\varphi$$

encontrarán al plano de Gauss en puntos P_1 y P_2 de coordenadas

$$\Delta y_{\varphi} = \Delta y_{-\varphi}$$
$$\Delta z_{\varphi} = \Delta z_{-\varphi}$$

Por la forma que presenta esta aberración se le ha llamado aberración de hoja. Una aberración de este tipo aparece en el 7.° orden.

Aberración 14.ª—Las componentes de esta aberración son:

$$\Delta y = A \cdot 40 \frac{k_1^3 h_1^6}{x_1^3 s_1^6} (1 + 6 \cos^2 \varphi)$$
$$\Delta z = A \cdot 120 \frac{k_1^3 h_1^6}{x_1^3 h_1^6} \operatorname{sen} 2\varphi \qquad [33]$$

De la misma manera que se ha hecho en las aberraciones 6.ª y 10.ª se hace aquí para simplificar la escritura:

$$a = A \cdot 40 \frac{k_1^3 h_1^6}{x_1^3 s_1^6} \qquad [34]$$

Así se obtiene

$$\Delta y = a(4+3 \cos 2\varphi) = 4a + 3a \cos 2\varphi$$
$$\Delta z = 3a \operatorname{sen} 2\varphi \qquad [35]$$

De estas dos relaciones se deduce inmediatamente que las figuras de aberración en el plano de Gauss serán circunferencias cuya ecuación general será:

$$(\Delta y - 4a)^2 + \overline{\Delta z}^2 = 9a^2 \qquad [36]$$

Es decir, que el centro de estas circunferencias estará desplazado $4a$ de la imagen ideal y el radio, que variará con la 3.ª potencia del campo, y la 6.ª de apertura vendrá dado por

$$R = 3\,a = 3\,A \cdot 40 \frac{k_1^3\, h_1^6}{x_1^3\, s_1^6} \qquad [37]$$

Los rayos meridionales ($\varphi = 0°$, $\varphi = 180°$) encontrarán a estas circunferencias en puntos de coordenadas:

$$\Delta y = 7a$$
$$\Delta z = 0$$

Mientras los sagitales ($\varphi = 90°$, $\varphi = 270°$) las encontrarán en puntos de coordenadas

$$\Delta y = a$$
$$\Delta z = 0$$

Es decir, que la aberración meridional es siete veces mayor que la sagital.

Hechos los cálculos oportunos para obtener la ecuación de la envolvente, es decir, eliminando el parámetro a entre la ecuación general y su derivada, se obtiene:

$$\overline{\Delta z}^2 - \tfrac{9}{7}\,\overline{\Delta y}^2 = 0$$

o, lo que es igual,

$$\left(\Delta z - \frac{3}{\sqrt{7}}\,\Delta y\right)\left(\Delta z + \frac{3}{\sqrt{7}}\,\Delta y\right) = 0$$

Con lo que se ve inmediatamente que la envolvente está constituída por dos rectas dadas por las ecuaciones

$$\Delta z = + \frac{3}{\sqrt{7}}\,\Delta y$$
$$\Delta z = - \frac{3}{\sqrt{7}}\,\Delta y \qquad [38]$$

El ángulo que forman entre sí estas dos rectas es de 97°10′50″ (fig. 8). Por consiguiente, esta aberración es del mismo tipo que la que se presenta en el 7.° orden, presentando un ángulo mayor que

los estudiados en las 6.ª y 10.ª aberraciones. Se trata, pues, de un coma de 9.º orden.

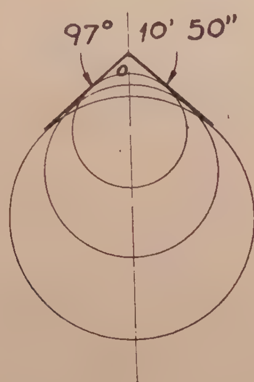


Figura 8

Aberración 15.ª—Las componentes de esta aberración son :

$$\Delta y = \mathrm{A} \cdot 240 \, \frac{k_1^4 \, h_1^5}{x_1^4 \, s_1^5} \cos \varphi \, (1 + 2 \cos^2 \varphi)$$

$$\Delta z = \mathrm{A} \cdot 480 \, \frac{k_1^4 \, h_1^5}{x_1^4 \, s_1^5} \cos^2 \varphi \, \mathrm{sen} \, \varphi \qquad [39]$$

Será conveniente proceder como se ha hecho en la aberración 9.ª ; es decir, será conveniente ver cómo varía el punto de intersección del rayo con el plano de Gauss al variar φ.

Los rayos meridionales 1 y 2 ($\varphi = 0°$, $\varphi = 180°$) (fig. 9) encontrarán al plano de Gauss en puntos T_1 y T_2 de coordenadas

$$\Delta y_{T_1} = - \Delta y_{T_2} = 3\,a$$

$$\Delta z_{T_1} = \Delta z_{T_2} = 0$$

siendo

$$a = \mathrm{A} \cdot 240 \, \frac{k_1^4 \, h_1^5}{x_1^4 \, s_1^5}$$

En cambio, los rayos sagitales 3 y 4 ($\varphi = 90°$, $\varphi = 270°$) encontrarán a dicho plano en la imagen ideal :

$$\Delta y = 0$$

$$\Delta z = 0$$

Los rayos 5 y 6, que encuentran a la pupila de entrada en los extremos de un diámetro y corresponde, por tanto, a los valores del azimut

$$\varphi \qquad 180 + \varphi$$

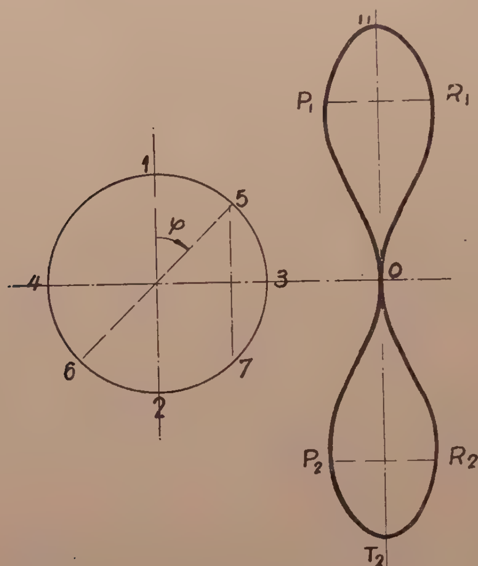


Figura 9

encontrarán al plano de Gauss en puntos R_1 y P_2 de coordenadas:

$$\Delta y_\varphi = - \Delta y_{180 - \varphi}$$

$$\Delta z_\varphi = - \Delta z_{180 + \varphi}$$

Dos rayos que pasan por la pupila de entrada por los extremos de una cuerda vertical 5 y 7 y que corresponden, por tanto, a los valores del azimut

$$\varphi \qquad 180 - \varphi$$

encontrarán al plano de Gauss en puntos R_1 y R_2 de coordenadas:

$$\Delta y_\varphi = - \Delta y_{180 - \varphi}$$

$$\Delta z_\varphi = \Delta z_{180 - \varphi}$$

Por último, dos rayos que encuentran a la pupila de entrada

en puntos 6 y 7 situados en los extremos de una cuerda horizontal, y que corresponden, por lo tanto, a los valores del azimut

$$\varphi \qquad -\varphi$$

encontrarán al plano de Gauss en puntos cuyas coordenadas son :

$$\Delta y_{\varphi} = \Delta y_{-\varphi}$$
$$\Delta z_{\varphi} = \Delta z_{-\varphi}$$

Se trata, por consiguiente, de una aberración de ocho análoga por completo a la que aparece en el 7.° orden.

Aberración 16.ª—Estudiando esta aberración se observará que sus componentes son :

$$\left.\begin{aligned} \Delta y &= \mathrm{A} \cdot 10 \frac{k_1 h_1^8}{k_1 s_1^8} (1 + 8 \cos^2 \varphi) \\ \Delta z &= \mathrm{A} \cdot 40 \frac{k_1 h_1^8}{x_1 s_1^8} \operatorname{sen} 2 \varphi \end{aligned}\right\} \qquad [40]$$

Como en los casos anteriores, se hace para simplificar :

$$a = \mathrm{A} \cdot 10 \frac{k_1 h_1^8}{x_1 s_1^8} \qquad [41]$$

Así, pues, se podrá escribir que :

$$\left.\begin{aligned} \Delta y &= a(5 + 4 \cos 2\varphi) = 5a + 4a \,.\, \cos 2\varphi \\ \Delta z &= 4a \,.\, \operatorname{sen} 2\varphi \end{aligned}\right\} \qquad [42]$$

De estas dos relaciones puede deducirse que las figuras de aberración son circunferencias cuya ecuación general es :

$$(\Delta y - 5a)^2 + \overline{\Delta z}^2 = 16 a^2$$

Por consiguiente, se trata de circunferencias cuyo centro está desplazado $5a$ respecto de la imagen ideal y cuyo radio varía con la 1.ª potencia del campo y la 8.ª de la apertura, y viene expresada por

$$\mathrm{R} = 4a = 4 \cdot 10 \frac{k_1 h_1^8}{x_1 s_1^8}$$

Los rayos meridionales ($\varphi=0$, $\varphi=180°$) encontrarán á estas circunferencias en puntos de coordenadas

$$\Delta y=9a$$
$$\Delta z=0$$

Y los sagitales ($\varphi=90°$, $\varphi=270°$) las encontrarán en un punto de coordenadas

$$\Delta y=a$$
$$\Delta z=0$$

La envolvente de las circunferencias, hechos los cálculos oportunos, tomará la forma

$$\overline{\Delta z}^2-\frac{16}{9}\overline{\Delta y}^2=0$$

y, por consiguiente,

$$\left(\Delta z-\frac{4}{3}\Delta y\right)\left(\Delta z+\frac{4}{3}\Delta y\right)=0$$

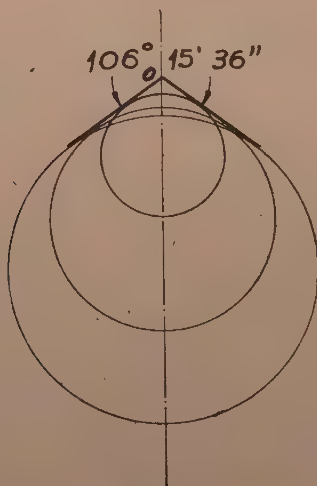


Figura 10

Esto quiere decir que la envolvente está constituída por dos rectas cuyas ecuaciones son :

$$\Delta z=+\frac{4}{3}\Delta y$$
$$\Delta z=-\frac{4}{3}\Delta y \qquad [43]$$

Estas dos rectas forman entre sí un ángulo de 106°15′36″ (figura 10). Inmediatamente puede comprobarse que esta aberración, que indudablemente es un coma cuya envolvente está constituída por dos rectas que forman entre sí un ángulo mayor que en los casos anteriores, es propia del 9.° orden, ya que no se tienen aberraciones análogas en los órdenes precedentes.

Aberración 17.ª—Se trata de estudiar la aberración cuyas componentes son:

$$\Delta y = A \cdot 320 \frac{k_1^4 h_1^5}{x_1^4 s_1^5} \cos^3 \varphi \left(1 + \frac{1}{2} \cos^2 \varphi\right)$$

$$\Delta z = A \cdot 160 \frac{k_1^4 h_1^5}{x_1^4 s_1^5} \cos^4 \varphi \operatorname{sen} \varphi \qquad [44]$$

Para estudiar la forma de esta aberración será conveniente observar cómo varía el punto de intersección de los rayos con el plano de Gauss al variar el azimut.

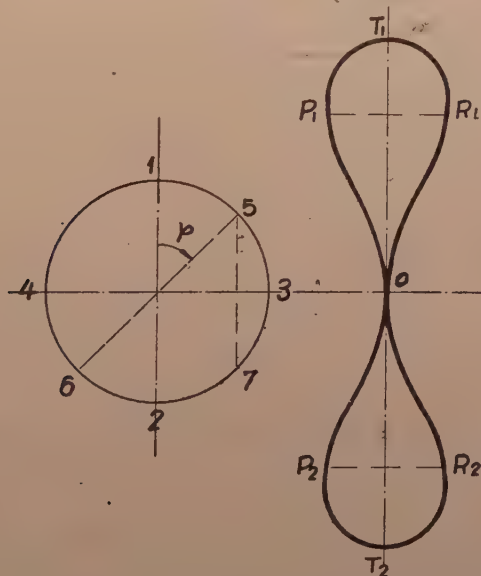


Figura 11

Sean dos rayos meridionales, 1 y 2, correspondientes a $\varphi = 0$ y $\varphi = 180°$, que pasan por el borde de la pupila (fig. 11). Estos rayos

encontrarán al plano de Gauss en dos puntos T_1 y T_2 de coordenadas

$$\Delta y_{T_1} = - \Delta y_{T_2} = \frac{3}{2} a$$
$$\Delta z_{T_1} = \Delta z_{T_2} = 0$$

siendo :

$$a = A \cdot 320 \frac{k_1^4 h_1^5}{x_1^4 s_1^5}$$

Dos rayos sagitales 3 y 4, correspondientes a $\varphi = 0$ y $\varphi = 90°$, encontrarán al plano de Gauss en un punto 0 de coordenadas

$$\Delta y_0 = 0$$
$$\Delta z_0 = 0$$

Los rayos que encuentran a la pupila de entrada en los extremos de un diámetro, por ejemplo 5 y 6, y que corresponden a unos valores del azimut

$$\varphi \qquad 180 + \varphi$$

encontrarán al plano de Gauss en puntos R_1 y P_2 de coordenadas

$$\Delta y_\varphi = - \Delta y_{180+\varphi}$$
$$\Delta z_\varphi = - \Delta z_{180+\varphi}$$

Dos rayos que encuentren a la pupila de entrada en los extremos de una cuerda vertical, 5 y 7, correspondientes, por lo tanto, a los valores

$$\varphi \qquad 180 - \varphi$$

encontrarán al plano de Gauss en puntos R_1 y R_2 de coordenadas

$$\Delta y_\varphi = - \Delta y_{180+\varphi}$$
$$\Delta z_\varphi = \Delta z_{180+\varphi}$$

Y, finalmente, los rayos 6 y 7, que encuentran a la pupila de entrada en los extremos de una cuerda horizontal, y corresponden a los valores del azimut

$$\varphi \qquad - \varphi$$

encontrarán al plano de Gauss en puntos P_2 y R_2 de coordenadas

$$\Delta y_\varphi = \Delta y_{-\varphi}$$
$$\Delta y_\varphi = -\Delta z_{-\varphi}$$

Si se examina la forma de esta aberración se observará que presenta también forma de ocho, pero como en este caso la componente Δy depende de $\cos^3 \varphi$ y la componente Δz de $\cos^4 \varphi$, mientras en los casos anteriores la componente Δy depende de $\cos \varphi$ y la componente Δz de $\cos^2 \varphi$, para distinguirla de algún modo se le dará el nombre de aberración de ocho de 2.° orden. Esta aberración no tiene análogas en los órdenes precedentes, presentándose por primera vez en el 9.° orden.

Aberración 18.ª—Escribiendo las componentes de la aberración en el plano de Gauss son:

$$\Delta y = A \cdot 10 \frac{h_1^9}{s_1^9} \cos \varphi \qquad\qquad [45]$$
$$\Delta z = A \cdot 10 \frac{h_1^9}{s_1^9} \operatorname{sen} \varphi$$

Esta aberración presenta infinitos ejes de simetría, ya que sus curvas en el plano de Gauss son circunferencias cuyo radio crece con la 9.ª potencia de la apertura, y viene dado por

$$R = A \cdot 10 \frac{h_1^9}{s_1^9} \qquad\qquad [46]$$

Esta aberración es la llamada aberración esférica, que puede preverse desarrollando en serie la esférica y limitando el desarrollo al 9.° orden. Como se ve, es en todo análoga a las que se presentan en el 3.°, 5.° y 7.° órdenes.

Aberración 19.ª—En cuanto a esta aberración, presenta como componentes:

$$\Delta y = 160 \cdot A \frac{k_1^5 h_1^4}{x_1^5 s_1^5} \cos^4 \varphi \qquad\qquad [47]$$
$$\Delta z = 0$$

Como en el caso de la aberración 7.ª, esta aberración carece de componente sagital, reduciéndose a un segmento que es recorrido cuatro veces por el rayo mientras el azimut φ varía de 0° a 360°.

Cuando se trata de determinar el efecto de esta aberración, basta considerar un segmento horizontal sobre el plano objeto. Es inmediato que los rayos meridionales estarán afectados por esta aberración, mientras los rayos sagitales no lo estarán.

Suponiendo la apertura y el azimut constantes

$$a = \mathrm{A} \cdot 160 \frac{k_1^5 h_1^4}{x_1^5 s_1^4} \cos^4 \varphi = \text{const}$$

quedan las componentes de la forma:

$$\Delta y = a \frac{k_1^5}{x_1^5} \qquad \Delta z = 0 \qquad [48]$$

Se trata, por consiguiente, de una aberración del tipo de la distorsión. La imagen del segmento rectilíneo situado sobre el plano objeto será en el plano de Gauss un área (fig. 3), limitada por un lado por un segmento de recta, que es la imagen sagital, y por el otro, por un segmento curvilíneo que corresponderá a los valores respectivos del azimut y la apertura

$$\varphi = 0 \quad \varphi = 180^\circ \qquad h_1 = h_{\text{MX}}$$

Esta aberración es una distorsión comática propia del 9.° orden.

Aberración 20.ª—Las componentes de esta aberración son en el plano de Gauss:

$$\Delta y = \mathrm{A} \cdot 80 \frac{k_1^2 h_1^7}{x_1^2 s_1^7} \cos \varphi (1 + 3 \cos^2 \varphi) \qquad \Delta z = \mathrm{A} \cdot 240 \frac{k_1^2 h_1^7}{x_1^2 s_1^7} \cos^2 \varphi \operatorname{sen} \varphi \qquad [49]$$

Como en las aberraciones 9.ª y 15.ª, para ver qué aspecto presenta esta figura, será conveniente estudiar cómo varía el punto de intersección de los rayos con el plano de Gauss al variar el ángulo.

Sean dos rayos meridionales 1 y 2, correspondientes a $\varphi = 0$ y $\varphi = 180^\circ$, que pasan por el borde de la pupila de entrada (fig. 12).

Estos rayos cortarán al plano de Gauss en dos puntos T_1 y T_2 de coordenadas:

$$\Delta y_{T_1} = - \Delta y_{T_2} = 4a$$
$$\Delta z_{T_1} = \Delta z_{T_2} = 0$$

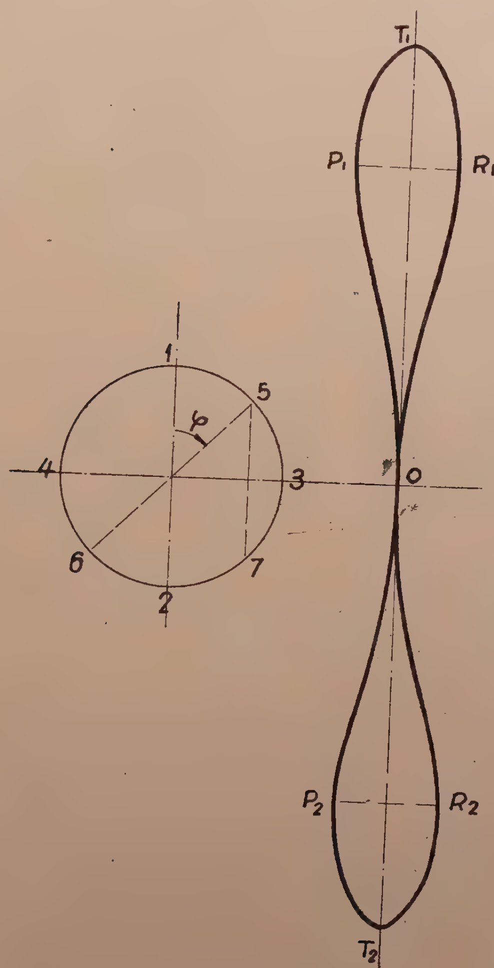


Figura 12

siendo

$$a = A \cdot 80 \frac{k_1^2 h_1^7}{x_1^2 s_1^7} \qquad [50]$$

Dos rayos sagitales, 3 y 4, que corresponden a $\varphi = 90°$ y $\varphi = 270°$,

y que pasan por el borde de la pupila de entrada, encontrarán al plano de Gauss en la imagen ideal 0 de coordenadas

$$\Delta y_0 = 0$$
$$\Delta z_0 = 0$$

Dos rayos, 5 y 6, que encuentran a la pupila de entrada en los extremos de un diámetro y corresponden, por consiguiente, a unos valores del azimut

$$\varphi \qquad 180 + \varphi$$

cortarán al plano de Gauss en puntos R_1 y P_2, cuyas coordenadas serán iguales y de signo contrario

$$\Delta y_\varphi = -\Delta y_{180+\varphi}$$
$$\Delta z_\varphi = -\Delta z_{180+\varphi}$$

Análogamente, dos rayos 5 y 7 que encuentran a la pupila de entrada en los extremos de una cuerda vertical, correspondientes a los valores

$$\varphi \qquad 180 - \varphi$$

encontrarán al plano de Gauss en puntos R_1 y R_2, cuyas coordenadas son iguales y de signo contrario, mientras las abscisas son iguales en magnitud y signo

$$\Delta y_\varphi = -\Delta y_{180-\varphi}$$
$$\Delta z_\varphi = \Delta z_{180-\varphi}$$

Por último, dos rayos que encuentran la pupila de entrada en punto 6 y 7, situados en los extremos de una cuerda horizontal y que, por lo tanto, corresponden a unos valores del azimut:

$$\varphi \qquad -\varphi$$

encontrarán al plano de Gauss en puntos P_2 y R_2, cuyas coordenadas son iguales en magnitud y signo, mientras las abscisas son iguales y de signo contrario.

$$\Delta y_\varphi = \Delta y_{-\varphi}$$
$$\Delta z_\varphi = -\Delta z_{-\varphi}$$

Se trata de una aberración de ocho de la misma serie que las que se han presentado en las aberraciones 9.ª y 15.ª

Aberración 21ª. — Esta última aberración tiene como componentes:

$$\Delta y = A \cdot 240 \frac{k_1^3 h_1^6}{x_1^3 s_1^6} \cos^2 \varphi \left(1 + \tfrac{4}{3} \cos^2 \varphi\right)$$

$$\Delta z = A \cdot 480 \frac{k_1^3 h_1^5}{x_1^3 s_1^6} \cos^3 \varphi \cdot \operatorname{sen} \varphi \qquad [51]$$

Se trata de una aberración análoga a la 13.ª y, como en este caso, será conveniente estudiar la figura de esta aberración viendo

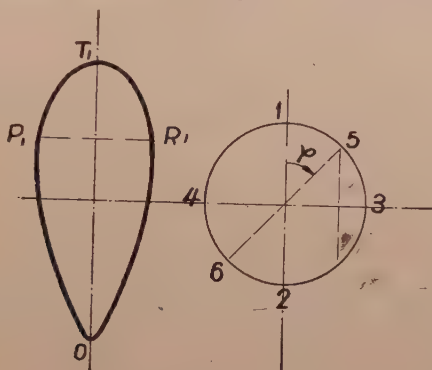


Figura 13

cómo varía el punto de intersección del rayo con el plano de Gauss al variar el azimut.

Dos rayos meridionales, 1 y 2 (fig. 13), correspondientes a $\varphi = 0$, $\varphi = 180$, encontrarán al plano de Gauss en puntos T_1 y T_2 de coordenadas.

$$\Delta y_{T_1} = \Delta y_{T_2} = \frac{9}{5} a$$

$$\Delta z_{T_1} = \Delta z_{T_2} = 0$$

Por consiguiente, $T_1 = T_2$.

Aquí es:

$$a = A \cdot 240 \frac{k_1^3 h_1^6}{x_1^3 s_1^6} \qquad [52]$$

En cuanto a los rayos sagitales, 3 y 4, que corresponden a $\varphi = 90°$, $\varphi = 270°$, encontrarán al plano de Gauss en un mismo punto 0 de coordenadas.

$$\Delta y_0 = 0$$

$$\Delta z_0 = 0$$

Los rayos 5 y 7, que encuentran a la pupila de entrada en los extremos de una cuerda vertical y corresponden, por lo tanto, a unos ángulos

$$\varphi \qquad 180 - \varphi$$

cortarán a plano de Gauss en puntos de coordenadas:

$$\Delta y_\varphi = \Delta y_{180-\varphi}$$
$$\Delta z_\varphi = - \Delta z_{180-\varphi}$$

Asimismo, dos rayos, 5 y 6, que encuentran a la pupila de entrada en los extremos de un diámetro, correspondientes, por tanto, a

$$\varphi \qquad 180 + \varphi$$

encontrarán al plano de Gauss en puntos de coordenadas

$$\Delta y_\varphi = \Delta y_{180+\varphi}$$
$$\Delta z_\varphi = \Delta z_{180+\varphi}$$

Y, por fin, los rayos 6 y 7, que encuentran la pupila de entrada en los extremos de una cuerda horizontal y corresponden a los valores del azimut

$$\varphi \qquad -\varphi$$

encontrarán al plano de Gauss en puntos P_1 y P_2 de coordenadas

$$\Delta y_\varphi = \Delta y_{-\varphi}$$
$$\Delta z_\varphi = \Delta z_{-\varphi}$$

Es, por consiguiente, una aberración de hoja, que se presenta por primera vez en el 9.° orden.

Instituto de Optica "Daza de Valdés".
Sección de Optica Geométrica.

35. ACERCA DE LA ESTRUCTURA DEL IODATO TALIOSO,

por D. SANTANA.

SUMMARY

The study of the silver iodate structure has been undertaken, having determined, through crystallographic and Dedye-Scherrer methods, the unit cell parameters, which were found to be:

$$a = 7{,}24\ \text{Å}$$
$$b = 5{,}77\ \text{Å}$$
$$c = 15{,}13\ \text{Å}$$

The number of molecules per unit cell found (N=7,66) seems to point either at a sub-periodicity, not apparent in the partial rotating crystal diagrama, or at a faulty structure.

The examination of the extintions shows the characteristic spatial group D_{2h}' (15).

El único iodato anhidro, no complejo, de metal monovalente no estudiado hasta ahora desde un punto de vista estructural, es el de plata.

Todos los ya conocidos (1), o pertenecen al grupo de la perowskita, o tienen una estructura relacionada con la de aquélla, como ocurre, por ejemplo, con el IO_3NA, cuya estructura fué considerada por Zachariasen como pérteneciente al tipo denominado «anti-Perowskita», y por L. Naray-Szabó y J. Neugebauer en un trabajo (2) posterior como un tipo de transición entre el tipo E de la perowskita y el tipo G, al que pertenecen los cuerpos con radical BX_3 diferenciado.

Hemos iniciado el estudio de la estructura dei IO_3Ag comparándola, en primer lugar, con la del IO_3Na, ya que por tener la plata y el sodio radios iónicos muy parecidos y funcionar ambos con monovalentes, existen algunas estructuras de sales de plata semejantes a las correspondientes al sodio; así ocurre, por ejemplo, con

---

(1) GOLDSMIDT, M. V.: *Geochem. V. t. d. Elem.*, VII y VIII, 1929.—ZACHARIASSEN: *Skrif. Norske. Vd. Ak. Oslo Mat. Nat. Klasse*, 4 (1928).—GARRIDO, J.: AN. SOC. ESP. FIS. Y QUIM., 30, 811 (1932).—RIVOIR, L., y ABBAD, M.: AN. R. SOC. ESP. FIS. Y QUIM., XLIII, 427, 1051 (1947).

(2) *Jour. Am. Chem. Soc.*, 69, 1280 (1947).

los cloruros, fluoruros, bromuros y sulfatos. Por otra parte, las relaciones axiles de estas salas dadas por los cristalógrafos:

IO_3Na	0,9047 : 1 : 1,2815
IO_3Ag	0,4416 : 1 : 1,3072

no se oponen a esta idea, ya que basta doblar el eje *a* del iodato de plata para que dichas relaciones sean muy parecidas.

La estructura del IO_3Na fué primeramente estudiada por Zachariasen, que dió para la relación axil los valores:

0,903 : 1 : 0,636

en la que se observa que el valor del eje *c* es la mitad del dado por los cristalógrafos. Sin embargo, en la revisión de esta estructura de I. Náray-Szabó y J. Neugebauer ya citada, se rectifica aquella relación, dando para ella los valores:

0,903 : 1 : 1,272

que vienen a coincidir con los valores cristalográficos.

En este último trabajo se rectifica también el grupo V_h^{19} - Cmmm dado por Zachariasen por el V_h^{16} - Pbnm, al mismo tiempo que se modifica el tipo de estructura antiperowskita, que pasa al tipo G del Struktur-Bericht, el cual supone la existencia de un anión IO_3, con probable enlace homopolar. Como este cuerpo forma disoluciones sólidas con el IO_3NH_4, que pertenece al tipo de la perowskita, se da su estructura como una transición entre ambos tipos, el G y el E.

La aparición en el IO_3Na del ión IO_3, lo contrario de lo que pasa en el resto de los iodatos estudiados por rayos X, cuyas estructuras nos llevan a considerarlos como óxidos dobles, aumenta el interés por el estudio estructural del iodato de plata.

Para comparar ambas estructuras obtuvimos dos diagramas Debye-Scherrer en cámara Siemens 57,30 mm. de radio con radiación de tubo de Cu. Los diagramas obtenidos no presentan semejanza alguna, como puede comprobarse por la tabla de valores de $sen^2\,\theta$ que damos a continuación:

Tabla de comparacion de los diagramas de IO_3Ag y IO_3Na

IO_3Na $sen^2 \theta$	IO_3Ag $sen^2 \theta$
	0,0652
0,0672	0,0685
	0,0711
0,0791	
0,0849	0,0862
	0,0929
0,1022	
	0,1105
0,1160	
	0,1192
0,1288	
	0,1395
0,1477	
0,1556	
	0,1656
0,1705	0,1718
0,1720	
	0,1808
0,1910	0,1894
	0,2017
	0,2084
0,2139	
0,2332	
0,2514	
	0,2590

Por consiguiente, podemos afirmar que estos cuerpos no son isotípicos, ya que en este caso, por lo menos las rayas de bajo valor de $sen^2 \theta$ debieran tener mejor correspondencia.

A continuación intentamos la interpretación de diafragma de Debye-Scherer, tomando como base la relación axil dada por los cristalógrafos, ya que conociendo ésta resulta a veces posible la interpretación de diagramas de este tipo, en el caso de sistemas de baja simetría, como en el que consideramos ahora, que es el rómbico.

No fué posible encontrar en este estudio valores para los parámetros que nos permitieran un ajuste correcto de dicho diagrama.

En vista de estos resultados hemos estudiado esta estructura a

base de diagramas giratorios y de Weisenberg. Para ello fué preciso, en primer lugar, obtener cristales de IO_3Ag.

Obtención de los cristales.—Esta sal, insoluble en agua, se precipita por la acción de una disolución de iodato sódico o potásico sobre otra de nitrato de plata. El producto obtenido se disuelve, después de lavar varias veces, en disolución amoniacal. Se precipita de nuevo el iodato de plata con ácido nítrico; el producto obtenido es muy puro, pero pulverulento. Después de lavar se disuelve de nuevo en disolución amoniacal. Dejando evaporar lentamente la disolución se depositarán cristales de iodato de plata. Si esta evaporación se efectúa sin precauciones especiales en la atmósfera del laboratorio, se obtienen agregados de cristales muy pequeños, donde no puede separarse ninguno utilizable para su estudio por rayos X. Para obtener cristales de un tamaño apreciable es necesario disminuir la velocidad de evaporación del amoníaco. Esto se consigue efectuando la cristalización en recipiente aislado de la atmósfera por medio de un cierre hidráulico, en el cual es posible regular la velocidád de evaporación del amoníaco entre ciertos límites. Después de varios ensayos pudimos obtener algunos cristales aislados entre una masa de agregados cristalinos. Los cristales únicos así obtenidos son muy pequeños, bastante perfectos y dan reflexiones muy buenas en el goniómetro.

Estos cristales tienen forma tabular y son semejantes a los que aparecen dibujados en la obra de Groth (3) y en un trabajo de Marignac (4). Tienen el pinacoide (001) muy desarrollado. No aparecen las caras (010) y (100), existiendo en cambio otras caras cuyas notaciones, según Eakle (5), son (101) y (011). Las medidas que hemos obtenido entre la cara (010) y las (100) y (011) están de acuerdo con los valores dados por Eakle en el trabajo citado.

Las dimensiones de estos cristales son muy pequeñas; la de mayor valor, en el sentido del que hemos denominado eje *a*, es aproximadamente de medio milímetro en uno de los cristales que hemos utilizado; la dimensión intermedia viene a ser de un tercio de la anterior, y la dimensión del eje más pequeño, que hemos llamado *c*, es de un orden mucho menor.

---

(3) *Chemistre Krystallographie,* B II, pág. 30.
(4) *Annales des Mines,* 3.ª serie, Mem. IX, 51 (1856).
(5) *Z. Kryst.,* 26, 579 (1896).

Hemos intentado estudiar en estos cristales las figuras de corrosión, y aunque no hemos podido llegar a ningún resultado de garantía, parece, sin embargo, que pertenecen a la clase holoédrica, que es la dada por Eakle en su trabajo citado.

Estudio por rayos X.—Hemos utilizado para este estudio la radiación de un tubo de cobre con un régimen de 40 Kv. y 8 ma. Obtuvimos buenos diagramas giratorios y de Weissenberg en las direcciones de los ejes *a* y *b*.

Para la obtención de diagramas giratorios alrededor del eje *a*, o sea en la dirección en que tiene mayor longitud el cristal, hemos utilizado una cámara Siemens de radio R=57,30 mm. En estos diagramas se observó la existencia de algunos puntos muy débiles entre el ecuador y el que parecía ser el primer paralelo; para comprobar si en rigor se trataba de un estrato intermedio formado de puntos muy débiles, obtuvimos varios diagramas giratorios parciales que nos demostraron plenamente la existencia de dicho estrato.

En la dirección del grueso de la tabla eje *c*, el centrado nos ofreció muchas dificultades, ya que por no existir caras paralelas a dicho eje tuvimos que utilizar la reflexión en la cara (001). Por ello, y debido además al pequeñísimo grosor de la tabla, sólo hemos podido obtener utilizables una serie completa de diagramas giratorios parciales y ninguno de Weisenberg.

En la dirección de la longitud intermedia, o sea en el del que hemos denominado eje *b*, la obtención de diagramas giratorios parciales no ofreció dificultad.

Los valores medios obtenidos a partir de los diagramas giratorios fueron los siguientes:

$$a=7{,}24 \text{ Å} \qquad b=5{,}77 \text{ Å} \qquad c=15{,}00 \text{ Å}$$

Para obtener el número de moléculas por celdilla unidad hemos partido del valor de 5,6475 dado por F. W. Clarke (6) para la densidad del iodato de plata cristalizado, a partir de una disolución amoniacal. El valor 5,525 que incluyen algunas tablas, es un valor medio entre el anterior y el de 5,4023 dado por el mismo autor para el producto pulverulento.

---

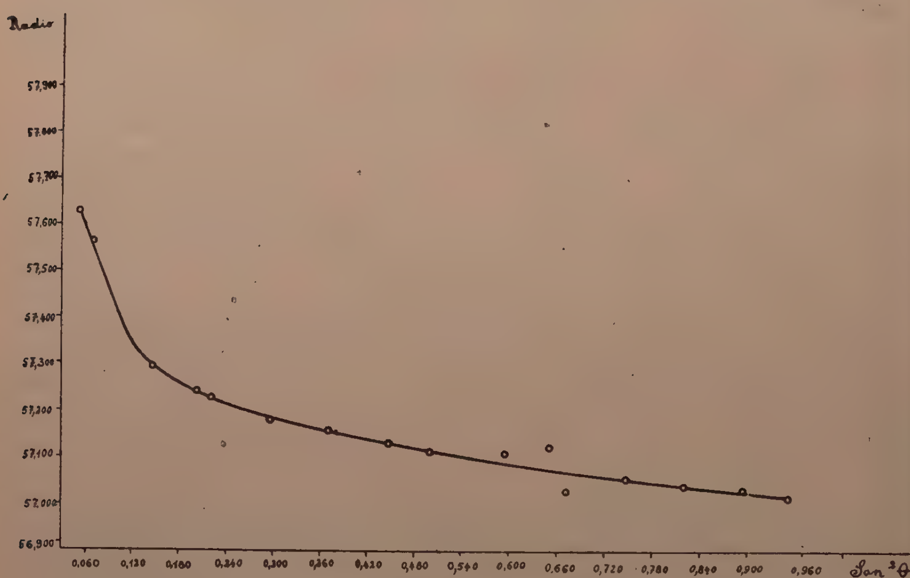
(6) *Am. J. Sei.*, 3, 14, 281.

A partir de los valores medios obtenidos en los diagramas giratorios, el número de moléculas por celdilla unidad resulta ser:

$$n = \frac{\delta \cdot N \cdot V}{P_m} = 7{,}583$$

Este resultado anormal no debe admitirse sin ulterior comprobación. Para ello hemos tratado de determinar los ejes con mayor precisión, valiéndonos de diagramas de Debye-Scherrer de mezclas en proporción variable de IO_3Ag y ClNa.

En dicho diagrama interpretamos, en primer lugar, las rayas correspondientes al ClNa por comparación del diagrama de la mezcla con los diagramas aislados de ambas sustancias, obteniéndose la curva de corrección de radios que damos a continuación en la figura.



Obtención de los valores de los ejes a partir del diagrama Debye-Scherrer de la mezcla de IO_3Ag y ClNa.

El elevado valor del eje *c* hace que en este diagrama existan planos de un tercer índice muy alto: la ventaja de estos planos es que permiten determinar el valor de ese eje con una gran precisión, aunque, sin embargo, este hecho dificulta la interpretación de los diagramas Debye-Scherrer. Para facilitarla, medimos previamente

en los cuatro diagramas Weissenberg, que habíamos obtenido e interpretado, los valores 2 correspondientes a los planos de mayor intensidad y dedujimos de ellos, multiplicándolos por la relación de los radios de ambas cámaras, los valores de $2l$ de dichos planos que les corresponde en el diagrama Debye-Scherrer. También nos ha facilitado la identificación de los índices de algunos planos la comparación de estos diagramas con los giratorios obtenidos en el mismo chasis que los diagramas de polvo, alrededor del eje *a*.

Por este procedimiento nos ha sido posible localizar fácilmente diversos planos a partir de los cuales hemos deducido los valores de los ejes; así el eje *c* lo obtuvimos a partir de los planos (006), (008), (0010), (0016) y (0018), el eje *b* de los (020) y (034) y el eje *a* de los planos (103), (107) y (200). Las medidas de los valores 21 las obtuvimos en un comparador en el que puede apreciarse hasta la media décima de milímetro.

A partir de los valores de $2l$ y de los de R dados por la curva de corrección obtuvimos para los ejes los valores siguientes:

$$a=7{,}24 \qquad b=5{,}77 \qquad c=15{,}13$$

A partir de estos valores se calcularon primeramente los teóricos de $2l$, tomando para el radio los valores correspondientes de la curva de corrección. La escala dibujada a partir de estos resultados nos dió una coincidencia casi perfecta con el diagrama. También se observa coincidencia satisfactoria entre los valores teóricos y experimentales de $\text{sen}^2\,\theta$ de las rayas de difracción del diagrama, como puede comprobarse en la segunda tabla

Indices	$sen^2 \theta$ observados	$sen^2 \theta$ calculados	Indices	$sen^2 \theta$ observados	$sen^2 \theta$ calculados
211	0,0652	0,06555	034	0,2017	0,20144
203	0,0685	0,06845	412	0,2084	0,20885
020	0,0711	0,07114	0010	0,2590	0,25864
213	0,0862	0,08627	219	0,2714	0,27250
006	0,0929	0,09314	0210	0,3304	0,32982
016	0,1105	0,1109	2111	0,3773	0,37589
221	0,1192	0,1189	611	0,4284	0,42705
223	0,1395	0,13962	2013	0,4816	0,48234
008	0,1656	0,16556	0114	0,5239	0,52475
207	0,1718	0,17196	2213	0,5525	0,55346
400	0,1808	0,18072	2117	0,2100	0,81062
217	0,1894	0,18972	0018	0,8380	0,83788

Con estos valores de *a*, *b* y *c* resulta la siguiente relación axil:

$$1{,}2548 : 1 : 2{,}6222$$

que es muy parecida a la relación cristalográfica 0,4416 : 1 : 1,3077 dada por los cristalógrafos, siempre que se multipliquen los ejes *a* y *c* por 3 y 2, respectivamente.

Número de moléculas por celdilla unidad.—A partir de los valores anteriores de los ejes, el número de moléculas por celdilla unidad es de:

$$N = 7{,}649 \quad \text{para} \quad \delta = 5{,}6475$$

Descartado un error apreciable en los ejes, debe admitirse este valor como real y tratar de explicarlo por otras consideraciones.

Una primera hipótesis, no muy satisfactoria, consiste en suponer que existe una superioridad que duplique el número de moléculas, en cuyo caso habría 15 en celdilla unidad. Sin embargo, en los diagramas parciales obtenidos con el fin de comprobar la existencia de esta superioridad no hemos logrado encontrar ningún estrato intermedio que apoye esta suposición.

Otra hipótesis que puede también darse como posible es que la estructura del iodato de plata sea una estructura defectuosa por red incompleta. En esta clase de estructura la proporción real de los distintos átomos no responde a la estequiométrica dada por su fórmula química, sino que uno de los componentes entra en menor pro-

porción de la deducida de esta fórmula. Este es el caso, por ejemplo, del Fe en la pirrotita SFe, que es uno de los cuerpos que presentan esta clase de estructuras. La explicación estructural de este fenómeno es muy sencilla, pues se trata simplemente de que las redes de algunos de los átomos no están completas, por quedar libres ciertos lugares correspondientes a una serie de puntos cristalográficos equivalentes. Esto sucede también en la estructura del $Al_2O_3\gamma$ y en los bronces de sodio y wolframio. Otra clase de estructuras defectuosas es aquella en la que aunque la red está completa, sin embargo, puntos cristalográficamente equivalentes están ocupados por átomos diferentes. Puede existir mezcla de ambas clases de estructuras defectuosas, como es el caso del I_4Ag_2Hg, que luego citaremos.

Entre los cuerpos que poseen estructuras defectuosas por red incompleta se encuentran algunas sales de plata, como el $IAg\alpha$. Este cuerpo, estable entre los 146° C. y los 555° C., posee los átomos de J formando una agrupación compacta, cúbica, centrada. Los átomos de plata no están en lugares fijos en la celdilla, sino que se encuentran en ella ocupando los lugares vacíos que quedan entre los átomos de I, formando una especie de disolución sólida intersticial. También es defectuosa la estructura del IAg_4Hg entre los 50° y los 158°; su estructura es similar a la de la blenda; los cuatro átomos de iodo ocupan las posiciones del azufre, mientras que los demás átomos están estadísticamente distribuídos en 3 ó 4 posiciones de las ocupadas en aquella estructura por el cinc.

El iodato de plata pudiera quizá poseer una estructura defectuosa del primer tipo antes citado, o sea por red incompleta. Si suponemos que falta un átomo de plata en cada celdilla, el valor del peso molecular sería entonces de 269,315, en cuyo caso obtendríamos para el número de moléculas el valor de 8,031. De ser cierta esta hipótesis, la fórmula del iodato de plata sería entonces $IO_3Ag_{0,875}$.

Por lo demás, los análisis de la cantidad de IAg contenido en el iodato de plata son bastante discordantes, puesto que siendo el valor teórico de la proporción de IAg para la fórmula IO_3Ag de 83,02 %, los datos de la bibliografía (7) varían entre 82,17 % y 83,84 %.

Por cierto que se observa que el primero de estos valores coincide prácticamente con el calculado a partir de la fórmula $IO_3Ag_{0,875}$ que es el deducido en el caso de estructura defectuosa.

(7) GMELIN KRAUT'S.—*Handbuch der Anorganisches Chemie.*, V, 2, p. 121.

Grupo espacial

Para deducir el grupo espacial hemos utilizado los datos deducidos de los diagramas de Weissenberg correspondientes al ecuador y primer paralelo alrededor del eje *b* y del ecuador y segundo paralelo alrededor del eje *a*. También se intentó obtener el primer paralelo alrededor del último eje, pero con resultados negativos, pues sus intensidades, sumamente débiles, no eran, salvo en dos o tres puntos, ni siquiera perceptibles.

Las reglas de extinción, deducidas de la interpretación de estos diagramas son las siguientes:

OO1	se observa cuando	$l=2n$
OKO	»	$k=2n$
HOO	»	$h=2n$
HKO	»	$k=2n$
HO1	»	$h=2n$
OK1	»	$l=2n$
HK1	»	en todos los órdenes

Por consiguiente, el iodato de plata pertenece al apartado A-IV-3-*d* del sistema rómbico de las Tablas Internacionales. No nos ha sido posible obtener un diagrama de Weissenberg del ecuador alrededor del eje *c* utilizable, por lo que las extinciones del tipo HKO las hemos deducido de la interpretación de una serie de diagramas giratorios alrededor de dicho eje.

Por consiguiente, podemos dar como característico el grupo espacial: $D_{2h}(15)$ y como posibles los:

$$D_{2h}(1, 5, 11, 15), \quad D_2(1-4), \quad C_{2v}(1_{a,b,c},\ 2_{a,b,c},\ 4_{a,b,c},\ 5_{a,b,c})$$

He de dar las gracias al Jefe de la Sección de Rayos X, don Luis Rivoir, por la iniciativa del tema de este trabajo y la ayuda que me ha prestado durante el mismo.

Este trabajo ha sido ejecutado con el auxilio de una beca otorgada por el Ministerio de Marina.

Instituto de Física «Alonso de Santa Cruz»
Sección de Rayos X.

36. NUEVO METODO DE CALCULO DE RAYOS OBLIGUOS CUALESQUIERA, *por* C. MORAIS.

SUMMARY

By increasing the field and the aperture of optical systems the calculus of any oblique rays becomes more necessary, inasmuch as bi this means the coefficients of every aberration of superior order can be attained.

Therefore it is most important to have methods which enable us to follow the path of any oblique rays. Then a method is given, which presents some advantages in relation to the procedures which are generally employed.

Sea un sistema de ejes ortogonales con el origen en el centro de curvatura del dioptrio y orientado como en la figura

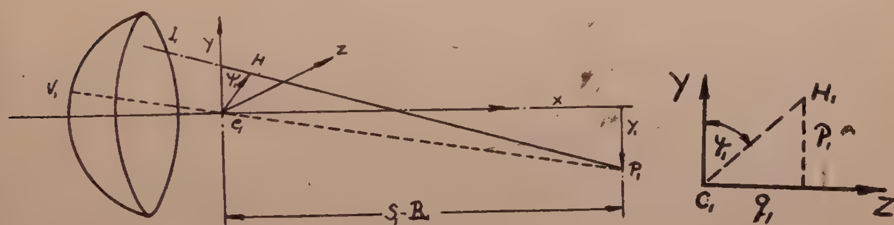


Figura 1

Sean

$$y = l_1 x + p_1$$

$$z = m_1 x + q_1$$

las ecuaciones del rayo incidente I_1P_1, y sean

$$X_1 = S_1 - R_1 \qquad y = y_1 \qquad z = 0$$

las coordenadas del objeto

El punto $H_1(p_1 q_1)$, intersección del rayo incidente con el plano yz unido al origen C_1, da la intersección de dicho plano con el de incidencia $I_1C_1P_1$.

Ponemos

$$\frac{q_1}{p_1} = \operatorname{tg} \psi_1$$

El rayo refractado encuentra al plano yz en un punto H'_1, que debe hallarse necesariamente sobre la recta C_1H_1, debiendo, como es sabido, coincidir el plano de incidencia con el de refracción. Las coordenadas p'_1, q'_1 de H'_1 deberán satisfacer la condición:

$$\frac{q'_1}{p'_1} = \operatorname{tg} \psi_1 \qquad [1]$$

Trazamos un eje auxiliar P_1C_1 y sea β_1 el ángulo que forma con el eje de las x. Tenemos:

$$\operatorname{tg} \beta_1 = -\frac{y_1}{S_1 - R_1} \qquad [2]$$

Llamamos α_1 al ángulo que forma el rayo incidente con este eje au-

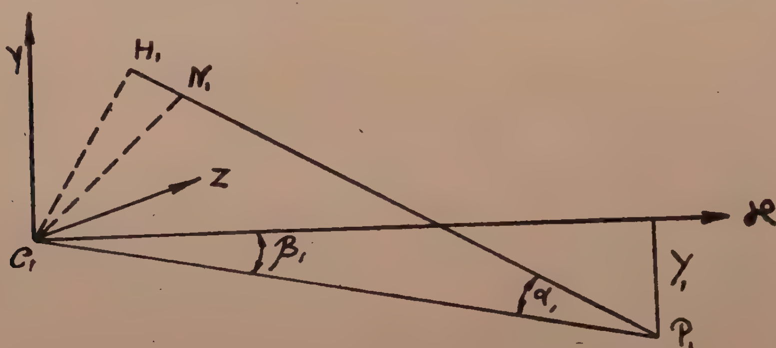


Figura 2

xiliar. Para hallarlo se traza desde el origen la perpendicular C_1N_1 al rayo incidente H_1P_1, y sea d_1 la longitud del segmento C_1N_1 tomada en valor absoluto.

Sabemos que

$$d_1 = (S_1 - R_1)\frac{\operatorname{sen} \alpha_1}{\cos \beta_1}$$

por otra parte, como es sabido por geometría analítica:

$$d_1 = \sqrt{\frac{(m_1 p_1 - l_1 q_1)^2 + p_1^2 + q_1^2}{1 + l_1^2 + m_1^2}}$$

igualando estas dos últimas relaciones, se obtiene:

$$\operatorname{sen} \alpha_1 = \frac{\cos \beta_1}{S_1 - R_1}\sqrt{\frac{(m_1 p_1 - l_1 q_1)^2 + p_1^2 + q_1^2}{1 + l_1^2 + m_1^2}} \qquad [3]$$

relación que da inmediatamente el ángulo α_1 en valor y signo.

En el plano de incidencia $I_1C_1P_1$ se encuentra el punto objeto P_1, que dista del vértice V_1

$$\xi_1 = \frac{S_1 - R_1}{\cos \beta_1} + R_1 \qquad [4]$$

Un rayo que pasa por P_1 forma con el eje auxiliar un ángulo α_1 dado por la [3]. Podemos encontrar entonces la imagen P'_1 de P_1 y el ángulo α'_1 que el rayo refractado forma con el eje auxiliar. Si ξ'_1 es la distancia de P'_1 al vértice, debe ser:

$$\xi'_1 = \frac{S'_1 - R_1}{\cos \beta_1} + R_1$$

y como ξ'_1 se halla por las conocidas fórmulas del cálculo de rayos meridionales, se obtiene inmediatamente:

$$S'_1 - R_1 = (\xi'_1 - R_1) \cos \beta_1$$

Las coordenadas de la imagen son, por tanto:

$$x'_1 = S'_1 - R_1 \qquad y'_1 = -(S'_1 - R_1) \operatorname{tg} \beta \qquad z'_1 = 0$$

Como ya habíamos dicho, el rayo refractado encuentra al plano yz en un punto H'_1 y forma con la recta $C_1H'_1$ un ángulo γ'_1 que calcularemos inmeditamente.

El rayo auxiliar forma con la recta $C_1H'_1$ un ángulo cuya representación esférica está dada por el arco de círculo máximo $H'_1P'_1$.

Consideramos el triángulo esférico $KP'_1H'_1$ rectángulo en K; en este triángulo se obtienen:

$$\hat{a} = H'_1P'_1 = \delta_1 \qquad \hat{b} = KP'_1 = 90 + \beta_1 \qquad \hat{c} = \widehat{KH'_1} = \psi_1$$

y, por tanto:

$$\cos \delta_1 = -\operatorname{sen} \beta_1 \cos \psi_1 \qquad [5]$$

donde β_1 está tomado con su signo.

Conocido δ_1 el ángulo γ'_1 viene dado por:

$$\gamma'_1 = 180^\circ - \alpha'_1 - \delta_1 \qquad [6]$$

En la figura 3 del triángulo $C_1H'_1P'_1$ se obtiene:

$$C_1 H'_1 = C_1 P'_1 \frac{\text{sen } \alpha'_1}{\text{sen } \gamma'_1}$$

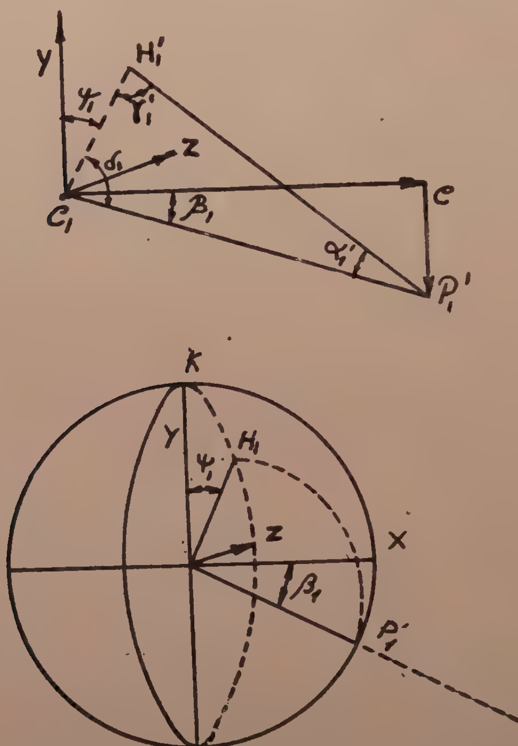


Figura 3

y como:

$$C_1 H'_1 = \sqrt{p_1'^2 + q_1'^2} = p'_1 \sqrt{1 + \left(\frac{q'_1}{p'_1}\right)^2} = p'_1 \sqrt{1 + \text{tg}^2 \psi_1} = \frac{p'_1}{\cos \psi_1}$$

$$C_1 P'_1 = \frac{S'_1 - R_1}{\text{sen } \gamma'_1}$$

sustituyendo se encuentra

$$p'_1 = \frac{S'_1 - R_1}{\cos \beta_1} \frac{\text{sen } \alpha'_1}{\text{sen } \gamma'_1} \cos \psi_1$$

y, finalmente, teniendo en cuenta la ecuación [6] podemos escribir:

$$p'_1 = (S'_1 - R_1) \frac{\cos \psi_1 \text{ sen } \alpha'_1}{\cos \beta_1 \text{ sen } (\alpha'_1 + \delta_1)} \qquad [7]$$

y como

$$q'_1 = p'_1 \operatorname{tg} \psi_1$$

q'_1 viene dada por

$$q'_1 = (S'_1 - R_1) \frac{\operatorname{sen} \psi_1 \operatorname{sen} \alpha'_1}{\cos \beta_1 \operatorname{sen} (\alpha'_1 + \delta_1)} \qquad [8]$$

Las ecuaciones del rayo refractado son :

$$y = l'_1 x + p'_1$$
$$z = m'_1 x + q'_1$$

y como para :

$$x = S'_1 - R_1$$

debe ser

$$y = y'_1 \qquad z = 0$$

se obtiene

$$l'_1 = - \frac{\operatorname{sen} \beta_1 \operatorname{sen} (\alpha'_1 + \delta_1) + \cos \psi_1 \operatorname{sen} \alpha'_1}{\cos \beta_1 \operatorname{sen} (\alpha'_1 + \delta_1)} \qquad [9]$$

$$m'_1 = - \frac{\operatorname{sen} \psi_1 \operatorname{sen} \alpha'_1}{\cos \beta_1 \operatorname{sen} (\alpha'_1 + \delta_1)} \qquad [10]$$

Para pasar de la primera a la segunda superficie, calculamos las

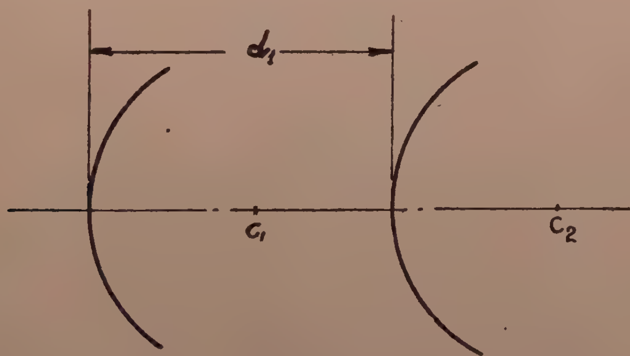


Figura 4

coordenadas p_2 q_2 del punto de intersección del rayo refractado por la primera superficie con el plano de frente que pasa por el centro de la segunda.

La distancia entre los dos centros es:

$$\overline{C_1 C_2} = R_2 + d_1 - R_1$$

obteniéndose, por tanto:

$$p_2 = l'_1(R_2 + d_1 - R_1) + p'_1 \qquad [11]$$

$$q_2 = m'_1(R_2 + d_1 - R_1) + q'_1 \qquad [12]$$

y poniendo ahora el origen de coordenadas en C_2. El rayo incidente sobre la segunda superficie tiene por ecuaciones:

$$y = l_2 x + p_2$$

$$z = m_2 x + q_2$$

donde

$$l_2 = l'_1 \qquad m_2 = m'_1$$

El problema de hallar el rayo refractado, conocidas las coordenadas del incidente, queda así resuelto en la forma más general. Procede ahora, por tanto, para poder comenzar el cálculo, encontrar las expresiones de p_1, q_1, l_1, m_1, en función de magnitudes conocidas.

Sea S_1 la distancia del plano objeto al vértice V_1 de la primera superficie, y sea y_1 su tamaño. Las coordenadas del punto objeto P_1 son ahora:

$$S_1 - R_1 \qquad y_1 \qquad 0$$

Si x_1 es la distancia del diafragma al vértice y r_1 el radio de la

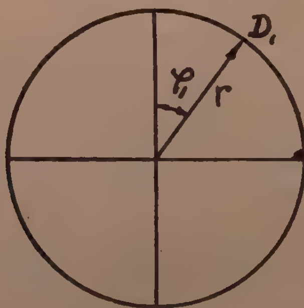


Figura 5

superficie, las coordenadas del punto D_1 de intersección del rayo con el plano del diagrama son:

$$x_1 - R_1 \qquad r_1 \cos\varphi \qquad r_1 \operatorname{sen}\varphi$$

Como el rayo incidente

$$y = l_1 x + p_1$$
$$z = m_1 x + q_1$$

debe pasar por los puntos P_1 y D_1 (conocidos), queda perfectamente determinado y resulta fácilmente:

$$l_1 = \frac{y_1 - r_1 \cos \varphi_1}{S_1 - x_1}, \qquad m_1 = -\frac{r_1 \operatorname{sen} \varphi_1}{S_1 - x_1}$$

$$p_1 = \frac{r_1 \cos \varphi_1 (S_1 - R_1) - y_1 (r_1 - R_1)}{S_1 - x_1}$$

$$q_1 = r_1 \operatorname{sen} \varphi_1 \frac{S_1 - R_1}{S_1 - x_1}$$

Es interesante tener fórmulas que den directamente

$$p'_1 \quad q'_1 \quad l'_1 \quad m'_1$$

conocidas las análogas magnitudes del espacio objeto.

Es evidente que para dicho espacio podemos escribir

$$p_1 = (S_1 - R_1) \frac{\cos \psi \operatorname{sen} \alpha_1}{\cos \beta_1 \operatorname{sen} (\alpha_1 + \delta_1)} \qquad [7']$$

$$q_1 = (S_1 - R_1) \frac{\operatorname{sen} \psi_1 \operatorname{sen} \alpha_1}{\cos \beta_1 \operatorname{sen} (\alpha_1 + \delta_1)} \qquad [8']$$

y como

$$n_1 (\xi_1 - R_1) \operatorname{sen} \alpha_1 = n_2 (\xi'_1 - R_1) \operatorname{sen} \alpha'_1$$

será

$$n_1 \frac{S_1 - R_1}{\cos \beta_1} \operatorname{sen} \alpha_1 = n_2 \frac{S'_1 - R_1}{\cos \beta_1} \operatorname{sen} \alpha'_1$$

y las [7], [8], [7'], [8'] nos permiten escribir

$$n_1 p_1 \frac{\operatorname{sen} (\alpha_1 + \delta_1)}{\cos \psi_1} = n_2 p'_1 \frac{\operatorname{sen} (\alpha'_1 + \delta_1)}{\cos \psi_1}$$

obteniendo de esta última ecuación:

$$p'_1 = \frac{n_1}{n_2} p_1 \frac{\operatorname{sen} (\alpha_1 + \delta_1)}{\operatorname{sen} (\alpha'_1 + \delta_1)} \qquad [13]$$

y análogamente para la coordenada q'_1

$$q'_1 = \frac{n_1}{n_2} q_1 \frac{\text{sen}(\alpha_1 + \delta_1)}{\text{sen}(\alpha'_1 + \delta_1)} \qquad [14]$$

Ponemos la [9] bajo la forma siguiente

$$l'_1 + \text{tg}\,\beta_1 = -\frac{\cos\psi_1 \,\text{sen}\,\alpha'_1}{\cos\beta_1 \,\text{sen}(\alpha'_1 + \delta_1)}$$

y análogamente en el espacio objeto.

$$l_1 + \text{tg}\,\beta_1 = -\frac{\cos\psi_1 \,\text{sen}\,\alpha_1}{\cos\beta_1 \,\text{sen}(\alpha_1 + \delta_1)}$$

De estas dos últimas ecuaciones resulta

$$l'_1 + \text{tg}\,\beta_1 = \frac{\text{sen}\,\alpha_1'}{\text{sen}\,\alpha_1} \frac{\text{sen}(\alpha_1 + \delta_1)}{\text{sen}(\alpha'_1 + \delta_1)} (l_1 + \text{tg}\,\beta_1) \qquad [15]$$

y análogamente

$$m'_1 = m_1 \frac{\text{sen}\,\alpha'_1}{\text{sen}\,\alpha_1} \frac{\text{sen}(\alpha_1 + \delta_1)}{\text{sen}(\alpha'_1 + \delta_1)} \qquad [16]$$

El esquema de cálculo es, por tanto, el siguiente:

Datos $\left\{ \begin{array}{lll} S_1 - R_1 & y_1 & \\ x_1 & r_1 \cos\varphi_1 & r_1 \,\text{sen}\,\varphi_1 \end{array} \right.$

$$l_1 = \frac{y_1 - r_1 \cos\varphi_1}{S_1 - x_1}, \qquad m_1 = -\frac{r_1 \,\text{sen}\,\varphi_1}{S_1 - x_1}$$

$$p_1 = \frac{r_1 \cos\varphi_1 (S_1 - R_1) - y_1 (x_1 - R_1)}{S_1 - x_1}, \qquad q_1 = x_1 \,\text{sen}\,\varphi_1 \frac{S_1 - R_1}{S_1 - x_1}$$

$$\text{tg}\,\psi_1 = \frac{q_1}{p_1}, \qquad \text{tg}\,\beta_1 = -\frac{y_1}{S_1 - R_1},$$

$$\text{sen}\,\alpha_1 = \frac{\cos\beta_1}{S_1 - R_1} \sqrt{\frac{(m_1 p_1 - l_1 q_1)^2 + p_1^2 + q_1^2}{1 + l_1^2 + m_1^2}}$$

$$\xi_1 = \frac{S_1 - R_1}{\cos\beta_1} + R_1$$

Con los valores ξ_1 y α_1 se tiene la representación de la esférica, encontrando:

$$\text{sen}\,\alpha'_1, \qquad \xi'_1 = \frac{S'_1 - R_1}{\cos\beta_1} + R_1, \qquad y'_1 = -(S'_1 - R_1)\,1\,\text{tg}\,\beta_1$$

Se calcula después:

$$\cos \delta_1 = -\operatorname{sen} \beta_1 \cos \psi_1$$

$$p'_1 = \frac{n_1}{n_2} p_1 \frac{\operatorname{sen}(\alpha_1 + \delta_1)}{\operatorname{sen}(\alpha'_1 + \delta_1)}$$

$$q'_1 = p'_1 \operatorname{tg} \psi_1$$

$$l'_1 = \frac{y'_1 - p'_1}{S'_1 - R_1} = l_2 \qquad [17]$$

$$m'_1 = \frac{q'_1}{S'_1 - R_1} = m_2 \qquad [18]$$

$$q_2 = m'_1(R_2 + d_1 - R_1) + q'_1 \qquad p_2 = l'_1(R_2 + d_1 - R_1) + p'_1$$

Las fórmulas [15] y [16] son fórmulas de cálculo que pueden compararse con las obtenidas aplicando las [17] y [18].

Casos particulares

A: Superficie plana

$$R_1 = \infty$$

En este caso

$$\operatorname{tg} \beta_1 = -\frac{y_1}{S_1 - R_1} = 0$$

$$\operatorname{sen} \alpha_1 = \left(\frac{p_1}{S_1 - R_1}\right)_{R_1 = \infty} \cdot \sqrt{\frac{\left(m_1 - l_1 \frac{q_1}{p_1}\right)^2 + 1 + \left(\frac{q_1}{p_1}\right)^2}{1 + l_1^2 + m_1^2}}_{R_1 = \infty}$$

Como

$$\lim_{R_1 = \infty} \frac{p_1}{S_1 - R_1} = \frac{r_1 \cos \varphi_1 - y_1}{S_1 - x_1} = -l_1$$

$$\left(\frac{q_1}{p_1}\right)_{R_1 = \infty} = \frac{r_1 \operatorname{sen} \varphi_1}{r_1 \cos \varphi_1 - y_1} = \frac{m_1}{l_1} = \operatorname{tg} \psi_1$$

se obtiene

$$\operatorname{sen}_{R_1 = \infty} \alpha_1 = -l_1 \sqrt{\frac{1 + \left(\frac{m_1}{l_1}\right)^2}{1 + l_1^2 + m_1^2}}$$

o también:

$$\operatorname*{sen}_{R_1=\infty} \alpha_1 = -\sqrt{\frac{l_1^2+m_1^2}{1+l_1^2+m_1^2}} \qquad [19]$$

De la fórmula $\xi_1 = \frac{S_1 - R_1}{\cos \beta_1} + R_1$ se obtiene:

$$\underset{R_1=\infty}{\xi_1} = S_1$$

y análogamente

$$\underset{R_1=\infty}{\xi'_1} = S'_1$$

como $\beta_1 = 0$ resulta

$$\cos \delta_1 = 0 \qquad \delta_1 = 90^\circ$$

y de la [15] se obtiene

$$l'_1 = \frac{\operatorname{tg} \alpha'_1}{\operatorname{tg} \alpha_1} l_1 \qquad [20]$$

$$m'_1 = \frac{\operatorname{tg} \alpha'_1}{\operatorname{tg} \alpha_1} m_1 \qquad [21]$$

Por otra parte, tenemos:

$$\underset{R_1=\infty}{y_1} = -(S_1 - R_1) \underset{R_1=\infty}{\operatorname{tg} \beta_1} = 0 + R_1 \underset{R_1=\infty}{\operatorname{tg} \beta_1} = \infty \cdot 0$$

y análogamente

$$\underset{R_1=\infty}{y'_1} = -(S'_1 - R_1) \underset{R_1=\infty}{\operatorname{tg} \beta_1} = \infty \cdot 0 = y_1$$

El rayo refractado debe pasar por el punto de coordenadas

$$S'_1 \qquad y'_1 = y_1 \qquad 0$$

y tener como coordenadas angulares los valores dados por [20] y [21].

Resulta, por tanto:

$$p'_1 = y_1 - l'_1 S'_1$$
$$q'_1 = -m'_1 S'_1$$

y las ecuaciones del rayo refractado,

$$y = l'_1 x + p'_1$$
$$z = m'_1 x + q'_1$$

quedan perfectamente determinadas

Se ve, por tanto, que en el caso de la superficie plana, sucede como si hubiéramos puesto el origen de coordenadas sobre la superficie refractante.

Para pasar de la superficie plana a la siguiente se deben tener en cuenta las coordenadas p_2, q_2 del punto de intersección del rayo con el plano de frente que pasa por el centro de curvatura de la superficie siguiente a la plana, obteniéndose evidentemente:

$$p_2 = l'_1(d_1 + R_2) + p'_1$$
$$q_2 = m'_1(d_1 + R_2) + q'_1$$

El esquema de cálculo en el caso de $R = \infty$ es, por tanto, el siguiente:

Se conocen: l_1, m_1, s_1, y_1

$$\operatorname{sen} \alpha_1 = -\sqrt{\frac{l_1^2 + m_1^2}{1 + l_1^2 + m_1^2}}$$
$$\xi_1 = S_1$$

Se traza el rayo en el plano de refracción y se encuentra ξ'_1 y α'_1. Se tiene

$$S'_1 = \xi'_1$$
$$l' = \frac{\operatorname{tg} \alpha'_1}{\operatorname{tg} \alpha_1} l_1$$
$$m'_1 = \frac{\operatorname{tg} \alpha'_1}{\operatorname{tg} \alpha} m_1$$
$$y'_1 = y_1$$
$$p'_1 = y_1 - l'_1 S'_1$$
$$q'_1 = -m'_1 S'_1$$
$$p_2 = l'_1(d_1 + R_2) + p'_1$$
$$q_2 = m'_1(d_1 + R_2) + q'_1$$

B: Objeto en el infinito

$$S_1 = y_1 = \infty$$

Se da como dato el valor de β_1, obteniéndose, por tanto:

$$\operatorname{tg} \beta_1 = -\left(\frac{y_1}{s_1}\right)_{y_1 = \infty;\ S_1 = \infty}$$

Resulta:

$$l_1 = -\operatorname{tg}\beta_1 \qquad m_1 = 0 \qquad [22]$$

$$p_1 = r_1 \cos\varphi_1 + \operatorname{tg}\beta_1(x_1 - R_1) \qquad [23]$$

$$q_1 = r_1 \operatorname{sen}\varphi_1 \qquad [24]$$

Fijándonos en que, en este caso, es sen $\alpha_1 = 0$, como además

$$\frac{(S_1 - R_1)\operatorname{sen}\alpha_1}{\cos\beta_1} = \sqrt{\frac{(m_1 p_1 - l_1 q_1)^2 + p_1^2 + q_1^2}{1 + l_1^2 + m_1^2}}$$

en el caso de $S_1 = \infty$ el producto $(S_1 - R_1)\operatorname{sen}\alpha_1$ tiene, como se deduce del segundo miembro de la ecuación anterior, un valor finito que da la distancia H_1 entre el rayo incidente y el eje auxiliar. Teniendo presente las [22], [23] y [24] se obtiene inmeditamente

$$H_{1\,S_1=0} = \sqrt{\frac{r_1^2\operatorname{sen}^2\varphi_1\operatorname{tg}^2\beta_1 + p_1^2 + q_1^2}{1 + \operatorname{tg}^2\beta_1}} = \cos\beta_1\sqrt{r_1^2\operatorname{sen}^2\varphi_1\operatorname{tg}^2\beta_1 + p_1^2 + q_1^2}$$

y el cálculo se continúa igual a como se hacía en el caso de la aberración esférica con el objeto situado en el infinito.

Presentado en la V Reunión anual de la Real Sociedad de Física y Química.

Mayo, 1948.

37. ESPECTRO DE ABSORCION DE LOS ACEITES DE OLIVA EN LA ZONA ULTRAVIOLETA, *por* F. POGGIO y MARÍA MARTÍN RETORTILLO.

SUMMARY

It is studied the U. V. absorption spectra of 50 olive-oil samples from different qualities. It is found that in the wavelenght 255 $m\mu$ the maxime M extintion coefficient found for the pression oils is 87, althoug in the extraction refined one, the minimun found is 139. This difference can serve as a quide in distinguishing both qualities.

The extinction curves from both oils is studied here and the differences between one hand another are setout here. These differences can also serve as analitical facts.

En un trabajo nuestro anterior (1) iniciamos el estudio de los aceites de oliva por medio de los espectros de absorción, con vistas a una posible diferenciación de calidades, ya que las numerosas pruebas propuestas hasta el momento no eran demasiado concluyentes.

Al aplicar la técnica espectral a este estudio continuamos el rumbo seguido por Chevallier, Guillot y Chabre (2) y por Guillot (3), quien llega a establecer que los aceites vírgenes españoles tienen un valor del coeficiente de extinción en las 270$m\mu$ que oscila entre 10 y 13. Por la misma época, Casamada (4) inició el estudio espectral en el U. V. de los aceites de presión y extracción, aunque sin valorar numéricamente los coeficientes de extinción. Lunde, Kringstadt y Weedon (5) también han estudiado 17 muestras de aceite, de las cuales 12 son españolas, y llegan a la conclusión de que los aceites vírgenes de presión presentan un coeficiente de extinción en las 275$m\mu$ que oscila entre 10 y 22; para los refinados de presión, entre 35 y 55, y para los refinados de extracción, entre 80 y 120.

En nuestro trabajo de iniciación anterior operamos con sólo 14 muestras, encontrando nuestros resultados concordantes en principio con los de los citados investigadores, aun cuando estimamos que los límites establecidos por ellos eran un poco estrechos para los aceites españoles. Por eso juzgamos conveniente operar con un número mayor de muestras, para poder establecer así con mejor conocimiento los límites de variación de los coeficientes en las dis-

tintas calidades de aceites y concretar más la diferenciación de calidades por la forma de la curva.

En todo el trabajo hemos utilizado un «espectógrafo para químicos» Zeiss con óptica de cuarzo; como foco luminoso, la chispa eléctrica entre electrodos de acero al wolframio; las cubetas utilizadas han sido las logarítmicas de Scheibe y placas fotográficas de Valca. De todos los aceites estudiados se preparó una disolución al 1 % en alcohol absoluto, y esta solución se llevó al espectrógrafo, determinándose la curva de extinción y los valores del coeficiente de extinción de cada aceite en las longitudes de onda que se indican más adelante.

Este segundo estudio de los espectros de absorción de los aceites nos ha confirmado y ampliado lo que dedujimos en nuestro anterior trabajo en relación con la curva de extinción de las soluciones alcohólicas de aceite de oliva en la zona ultravioleta: Puede afirmarse, en general, que la simple inspección de las curvas de extinción de los aceites da una valiosa orientación sobre la calidad de éstos, porque en los aceites de presión la porción comprendida entre 290 y 250$m\mu$ es más llana cuanto mejor es la calidad del aceite, ya sea por la técnica según la cual se haya extraído, ya por el estado de la aceituna cuando se la sometió al prensado. Las curvas que inician una subida pronta entre ambas longitudes de onda, indican una calidad peor del aceite, aun dentro de los de mejor clase. Sirva de ejemplo la muestra 5, preparada especialmente por nosotros con las máximas garantías de calidad, que es una de las de valores más bajos en los coeficientes de extinción, y otro tanto pudiéramos decir de la muestra 1, aceite acapulco, que es la de menores coeficientes.

Los aceites de segunda presión dan valores más altos de los coeficientes. La curva inicia su ascenso en las longitudes de onda 280-290$m\mu$, carece de la zona baja y llana, que tan característica es en los mejores aceites de primera presión. Sin embargo, no cabe establecer un punto neto de separación entre ambas calidades, porque las peores calidades, dentro de primera presión, se entremezclan y superponen con los mejores de segunda presión. Hay una gradación continua en las curvas, que adquieren mayor pendiente al ir pasando de una a otra calidad, y por ello los coeficientes también van gradualmente elevándose. Aun cuando el tránsito sea gradual, la diferenciación es clara en los casos más distanciados, y sobre todo en la mejor calidad. Un aceite con curva de extinción baja y llana

entre 250 y 290$m\mu$ puede diagnosticarse, sin lugar a duda, como aceite virgen de primera presión, al menos en nuestra experiencia no hemos encontrado un solo caso en que esto no se haya cumplido.

Para mejor aquilatar estos conceptos es por lo que hemos elegido varias longitudes de onda en la zona más característica y hemos determinado los coeficientes de extinción, ya que la variación de éstos nos indica numéricamente la marcha de la curva.

En la tabla I se incluyen los valores de los coeficientes de extinción en las longitudes de onda 255, 270, 275 y 280$m\mu$ para 17 muestras de aceites de primera presión; en la tabla II, los que hemos obtenido para 11 muestras de aceites de segunda presión, y en la tabla III, los que resultan para 10 muestras de aceites refinados de presión.

TABLA I

Coeficientes de extinción en los aceites de primera presión

Muestra n.º	Procedencia	ε_{280}	ε_{275}	ε_{270}	ε_{255}
1	Badajoz	7,5	8	8	10
2	Granada	7,5	8,1	8,4	16
3	Córdoba	8	8,9	9	15
4	Granada	9,5	10	13	27
5	Cáceres	10	11	12	16
6	Toledo	10,5	12	14	30
7	Córdoba	11	11	11,5	12,5
8	Granada	11	12,3	12	33
9	Granada	17	18	18	20
10	Córdoba	18	22	27	50
11	Granada	18	19	20	41
12	Córdoba	21,5	22	24	30
13	Tarragona	22	23	24	35
14	Badajoz	23	23,5	24	25
15	Sevilla	27	28	29	32
16	Avila	28	29	30	36
17	Granada	29	30	31	45

TABLA II

Coeficientes de extinción en los aceites de segunda presión

Muestra n.º	Procedencia	ε_{280}	ε_{275}	ε_{270}	ε_{255}
18	Córdoba	17	17,8	18	21
19	Granada	22	22,4	24.5	46
20	Córdoba	28	31	33,5	39
21	Córdoba	28	31	33	49
22	Granada	29	32	34	72
23	Badajoz	31	32	33	37
24	Granada	34	37	39	82
25	Córdoba	35	36,5	38,5	48
26	Cáceres	36	37,5	39	50
27	Sevilla	45	46,5	48	66
28	Córdoba	46	51	54,5	64

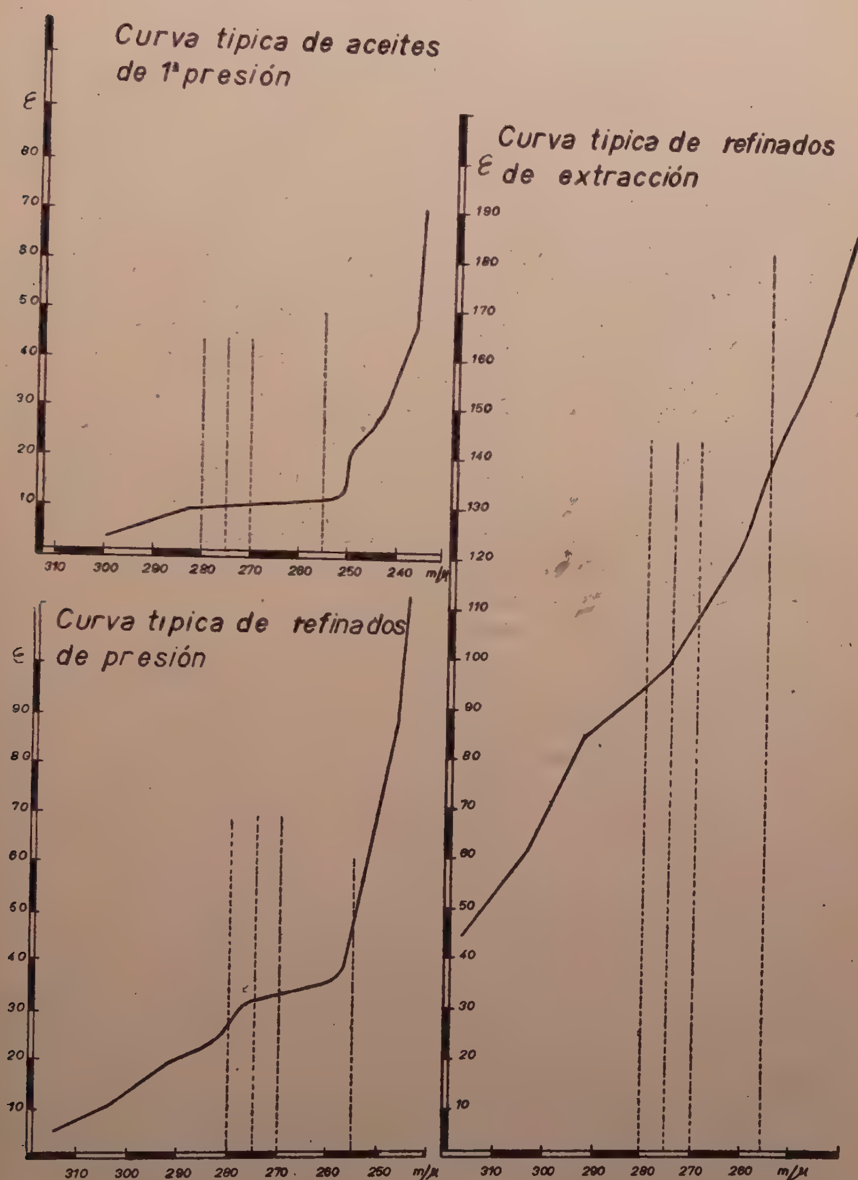
TABLA III

Coeficientes de extinción en los aceites refinados de presión

Muestra n.º	Procedencia	ε_{280}	ε_{275}	ε_{270}	ε_{255}
29	Córdoba	28	33	35	45
30	Córdoba	34	35	36	39
31	Córdoba	34	36	37	40
32	Sevilla	36	37	38	41
33	—	35	45	49	37
34	Córdoba	43	45	47	53
35	Córdoba	47	53	57	77
36	Sevilla	53	55	57	63
37	—	54	56	58	64
38	—	56	58	60	65

Para los aceites vírgenes de primera presión, los valores del coeficiente de extinción en las 280$m\mu$ oscilan entre 7 y 29 en todas las muestras por nosotros estudiadas. Para los aceites de segunda presión, el valor menor que hemos obtenido es de 17, que queda entremezclado con los de primera presión. En los refinados de presión el valor mínimo es de 28, que queda ya al límite de los de primera presión.

En la longitud de onda 270$m\mu$, los valores que hemos obtenido oscilan entre 8 y 31 para los de primera presión, 18 y 55 para los



de segunda y 35 y 60 para los refinados. Esta longitud de onda fué la utilizada por Guillot, que estableció que los aceites vírgenes es-

pañoles presentaban valores comprendidos entre 10 y 13, límites que estimamos demasiado estrechos.

En la longitud de onda 275$m\mu$, que fué la utilizada por Lunde y colaboradores, los valores del coeficiente de extinción oscilan entre 8 y 30 para los de primera presión, entre 17 y 51 para los de segunda presión y entre 33 y 58 para los refinados; la gradación de valores es exactamente la misma que en las otras longitudes de onda, y también resultan demasiado estrechos los límites fijados por Lunde y colaboradores, que son 10-22 para los de primera presión y 35-55 para los refinados.

Resumiendo, pues, en un solo grupo las tres calidades de aceites de presión que hemos considerado, resultan los valores máximos y mínimos hallados que se exponen en la tabla IV.

TABLA IV

Longitudes de onda

	280 $m\mu$	275 $m\mu$	270 $m\mu$	255 $m\mu$
Mínimo coeficiente hallado	7,5	8	8	10
Máximo coeficiente hallado	56	58	60	87

Los aceites de extracción por disolventes presentas unas curvas de extinciones de rápido ascenso, por lo cual los coeficientes llegan en seguida a valores altos, que los distinguen bastante bien, en general, de los que alcanzan los aceites de presión. Entre la curva de un buen aceite de presión y la de uno de extracción no hay la menor duda en cuál corresponde al uno y cuál al otro. Los peores aceites de presión que hemos manejado no llegan a alcanzar con sus coeficientes a ninguno de extracción.

En la tabla V se dan los valores que nos han resultado para 5 muestras de aceites de extracción en las longitudes de onda indicadas para las otras muestras.

En la longitud de onda 280$m\mu$ todos alcanzan valores próximos a 100 o muy sobrepasados, con excepción de uno, que sólo alcanzó el valor 83. En las 275$m\mu$ los coeficientes oscilan entre 87 y 155, lo cual no está muy de acuerdo con lo señalado por Lunde, que le asigna valores comprendidos entre 54 y 90. Tan sólo uno de los nuestros queda comprendido en esa zona.

TABLA V

Coeficientes de extinción en los aceites de extracción

Muestra n.°	Procedencia	ε_{280}	ε_{275}	ε_{270}	ε_{255}
39	Sevilla	83	87	90	102
40	Toledo	117	120	124	142
41	Córdoba	126	165	174	202
42	Córdoba	133	143	153	194
43	Toledo	152	155	158	180

Los aceites de extracción sin refinar no presentan gran diferencia con los refinados en cuanto se refiere a coeficientes de extinción en el U. V., ya que quedan perfectamente mezclados con ellos, según se ve en la tabla VI. Tampoco interesa la distinción espectral, ya que el aspecto, color, etc., los diferencia bien.

Para los refinados de extracción en la longitud de onda 280 $m\mu$ los valores encontrados oscilan entre 63 y 169; en las 275 $m\mu$, entre 71 y 176. Lunde y colaboradores señalan los límites de 80 y 120 como resultado del estudio de dos muestras. Los dos valores que da Lunde quedan comprendidos dentro de los nuestros. En las 270 $m\mu$ los coeficientes oscilan entre 80 y 183, y en las 255 $m\mu$, entre 139 y 203.

TABLA VI

Coeficientes de extinción en los aceites refinados de extracción

Muestra n.°	Procedencia	ε_{280}	ε_{275}	ε_{270}	ε_{255}
44	—	63	71	80	165
45	Córdoba	96	103	110	139
46	Córdoba	108	119	131	156
47	Córdoba	110	125	135	156
48	Córdoba	114	128	127	160
49	Granada	119	132	143	176
50	Málaga	169	176	183	203

Para mejor comprender la posición de los valores de los coeficientes de extinción en las 4 longitudes de onda hemos compuesto la tabla VII, en la cual resumimos los coeficientes máximo y mínimo en cada longitud de onda para cada calidad de aceite.

TABLA VII

Calidad del aceite	280 $m\mu$	275 $m\mu$	270 $m\mu$	255 $m\mu$
Primera presión	entre 7-29	entre 8-30	entre 8-31	entre 10-45
Segunda presión	17-46	17-51	18-69	21-98
Refinado de presión ...	28-56	33-58	35-60	38-87
Refinado de extracción	63-169	71-176	80-183	139-203
Extracción	83-152	87-165	90-158	102-202

Entre el valor máximo encontrado para los de presión y el mínimo hallado en los refinados de extracción hay las siguientes diferencias según las longitudes de onda:

En las 280$m\mu$, 7; en las 275$m\mu$, 13; en las 270$m\mu$, 20, y en las 255$m\mu$, 52. De las longitudes de onda que hemos considerado, las que más distancian por los valores de sus coeficientes de extinción las dos calidades, presión y refinado de extracción, son las 270$m\mu$ y las 255$m\mu$.

Pensando en el problema de mezcla de aceites de ambas calidades y teniendo en cuenta la propiedad aditiva de la extinción, es inmediata la deducción de que los aceites de óptima calidad, es decir, aquellos que presentan los más bajos coeficientes de extinción, podrán mezclarse hasta un cierto límite con aceites extraídos sin que los coeficientes salgan de los límites asignados a los de presión, y tanto mayor podrá ser la cantidad de aceite de extracción cuanto mejor sea la calidad de éste; es decir, cuanto más bajos sean sus coeficientes de extinción.

Un aceite como el de la muestra núm. 1, aceite acapulco de la mejor calidad y con los coeficientes más bajos, será el que pueda admitir más adulteración sin que los coeficientes de extinción se salgan de los límites correspondientes a su calidad. Si este aceite cuyo coeficiente de extinción en las 255$m\mu$ vale 10 se mezcla con uno re-

finado de extracción tal como el de la muestra 46, que es uno de los de menor valor del mismo coeficiente—156—, los valores del coeficiente de extinción para varias mezclas, según se deduce teóricamente y comprobamos experimentalmente, son los siguientes:

% de aceite de extracción	0	20	40	60	80	100
Coeficiente de extinción en 255 $m\mu$	10	39,2	68,4	98	127	156

En este caso, que es el más desfavorable para la técnica que estudiamos, por tratarse de aceites con los menores coeficientes y, por tanto, los que más se prestan a las mezclas, podrá admitir hasta un 40 % de aceite de adulterante sin que el coeficiente se salga de los límites de los buenos de presión; claro es que el valor 68,4 no permitiría clasificarlo como aceite de primera presión; a lo más, se diría un aceite de segunda o un refinado, y no de los mejores.

Frente a este caso, el más desfavorable, puede considerarse el caso opuesto y más favorable, que es cuando se mezcla un aceite de presión con coeficientes altos con otro de extracción también con valores elevados de coeficientes: tal sería si se mezclara el aceite muestra núm. 24, cuyo coeficiente en 255$m\mu$ vale 82, con el aceite refinado de extracción 50, cuyo coeficiente vale 203; los valores de los coeficientes para varias mezclas de estos aceites serían los siguientes:

% de aceite de extracción.	0	10	20	40	60	80	100
Valores del coeficiente de extinción en las 255 $m\mu$.	82	92	105	129	154	178	203

En este caso un 10 % del aceite adulterante da lugar a un valor del coeficiente que no es el propio de los aceites de presión.

En las mezclas, por lo tanto, las cantidades de aceites de extracción añadidas al de presión que puede delatarse depende de la calidad de los aceites que se mezclan. En el caso más desfavorable entre

las muestras con que hemos exprimentado puede delatarse desde un 40 % de aceite de extracción, y en el caso más favorable, se salen los coeficientes de los valores correspondientes a los aceites de presión con menos de un 10 % de aceite de extracción.

Por cuanto se refiere a la interpretación de la variación de estos coeficientes nos remitimos a la discusión que sobre ella hacemos en nuestro anterior trabajo.

Instituto de Optica "Daza de Valdés".
Sección de Espectros Opticos.
Instituto Español de Oceanografía.
Departamento de Fisicoquímica.

BIBLIOGRAFIA

(1) F. Poggio y M.ª Martín Retortillo: An. Fis. Qui., XLII, 231 (1946).
(2) Chevalier, Guillot y Chabre: *Bull. Chim. Biol.*, 15, 358 (1933). Ref.: *Bull. Soc. Ch. France*, 54, 1970 (1933).
(3) Guillot: *Ann. Fals.*, 28, 69 (1935). Ref.: *Ch. Ind.*, 71 (1936).
(4) Casamada: *Mem. de l'Acad. de Ciencias i Arts.* Barcelona, XXV, n.º 9, (1935).

38. LA CAUSA DE LA MIOPIA NOCTURNA, *por* J. PALACIOS

RÉSUMÉ

On rappelle l'explication de la myopie nocturne donnée auparavant par l'auteur :

Au fur èt à mesure que décroit l'éclat, decroit aussi le pouvoir d'accommodation jusqu'a l'anhilation quand on atteint la limite de visibilité. L'oeil se rend presbyte dans l'obscurité.

En el artículo de J. M. Otero, L. Plaza y M. Ríos publicado en estos ANALES (núms. 5 y 6, 1948), se cita nuestro trabajo sobre la llamada miopía nocturna, y se nos incluye entre quienes consideran la aberración esférica como la única causa del fenómeno.

Nuestra interpretación, tal como se halla expuesta en nuestro trabajo publicado en *Investigación y Progreso*, y más concretamente en nuestro discurso de ingreso en la Real Academia de Medicina, página 42 (marzo de 1944), es la siguiente :

1.° *El poder de acomodación desaparece cuando falta el estímulo luminoso.*

2.° *La pérdida del poder de acomodación consiste en el alejamiento del punto próximo y en el acercamiento del punto remoto hasta que, en la oscuridad, el ojo normal queda enfocado a medio metro.*

3.° *La atropina no suprime el poder de acomodación. En cambio, produce una hipermetropía transitoria de unas dos dioptrías.*

Según nuestra interpretación, el nombre de miopía resulta inadecuado, pues como decimos en la página 30 del citado discurso :

«Con la falta de luz adolece el ojo de todos los defectos posibles : es miope, porque se acerca el punto remoto ; présbita, porque pierde el poder de acomodación, e hipermétrope, porque se aleja el punto próximo.»

Otero y Durán descantaron la aberración esférica como causa de la miopía basándose en medidas hechos en ojos atropinizados, lo cual no era razón suficiente. Las medidas recientes de Otero, Plaza y Ríos muestran que la aberración esférica no explica el acercamiento del punto remoto cuando se dilata la pupila. De ello ha de deducirse, de acuerdo con la primera de nuestras conclusiones, que:

La ametropía nocturna obedece exclusivamente a que se inhibe el poder de acomodación cuando falta el estímulo luminoso.

Lisboa, septiembre, 1948.

39. SOBRE EL MOVIMIENTO ROTATORIO, *por* L. VILLENA.

SUMMARY

Usually the magnitudes and concepts relative to rotary movements appertaining to several chapters of Kinetics are introduced as they become necessary.

Greater rigour and accuracy are attainable introducing all said concepts and magnitudes at the same and only time when dealing with the particule. Then it is sufficient to generalize for the rigid sòlid the results obtained so as to draw out equilibrium conditions and motion equations.

The following exposition is particularly grounded on the vectorial calculus.

1. INTRODUCCIÓN

En la Mecánica del cuerpo rígido se acostumbra a descomponer el estudio del movimiento general (en particular las condiciones de equilibrio) en una translación del sólido en bloque y una rotación del mismo alreredor del eje instantáneo de giro.

Para dar una mayor unidad de concepto a la Dinámica (en particular a la Estática) del cuerpo rígido, es conveniente poder hallar las ecuaciones correspondientes a ambos movimientos (o ambas condiciones de equilibrio), sin más que generalizar relaciones previamente halladas para la partícula.

Este es el camino que en la mayor parte de los textos se sigue en lo que respecta al movimiento de translación. Pero no ocurre así en el movimiento de rotación, pues las magnitudes y ecuaciones con él relacionadas se acostumbran a establecer por primera vez al estudiar la Donámica del cuerpo rígido, no disponiéndose de ellas en la Estática de dicho cuerpo. Se pierde así el paralelismo de que venimos hablando entre los dos tipos de ecuaciones de equilibrio y movimiento y se complica innecesariamente la exposición de la Estática y la Dinámica.

Es muy conveniente, por otra parte, utilizar, en toda su extensión, el cálculo vectorial en el estudio no sólo del movimiento de translación, sino también del de rotación, manteniéndose así la correlación entre las magnitudes y relaciones que intervienen en estos dos movimientos, y acortándose, por ende, los pasos necesarios para obtener las ecuaciones correspondientes.

A continuación se inicia el estudio del movimiento de rotación, haciendo especial énfasis del cálculo vectorial, que presta sencillez y rigor a los resultados obtenidos. Se indica, finalmente, el proceso

a seguir, utilizando tensores, si bien este camino no es tan apropiado como el anterior para la enseñanza.

2. Cinemática del movimiento rotatorio de una partícula

Sea una partícula o punto material de A de masa m y sujeto a permanecer a una cierta distancia de un eje fijo BB′. El único movimiento de esta partícula, compatible con las ligaduras, es el de rotación en un plano π normal a BB′, que encuentra a este eje en el punto O.

En estas circunstancias, si tomamos a partir del punto O un vector unitario $\overline{u}$ situado sobre el eje de giro y dirigido de tal manera que desde su extremo, se vea al punto A moverse en sentido positivo, podemos representar el desplazamiento angular o ángulo elemental comprendido entre OA y OA′ por

$$d\overline{\theta} = \overline{u}\, d\theta$$

en que $d\theta$ es la diferencia entre los ángulos θ y θ' que forman OA y OA′ con una recta arbitraria del plano π que pasa por O.

Si representamos por $\overline{\rho}$ al vector OA de magnitud constante, pero cuya direccción varían con el tiempo, y por $d\overline{\rho}$ al desplazamiento elemental del punto A, que podemos suponer efectuado según la tangente al arco $d\overline{\theta}$ de circunferencia descrita por A, se verifica, evidentemente,

$$d\overline{\rho} = [d\overline{\theta}\, \overline{\rho}] \qquad [1]$$

Por definición, la velocidad angular instantánea del punto A es la derivada respecto del tiempo del desplazamiento angular instantáneo,

$$\overline{\omega} = \frac{d\overline{\theta}}{dt} \qquad [2]$$

vector de igual dirección y sentido que $d\overline{\theta}$. Dividiendo [1] por dt se obtiene

$$\frac{\overline{d\rho}}{dt} = \left[\frac{\overline{d\theta}}{dt}\, \overline{\rho}\right]$$

puesto que en un producto vectorial da igual dividir por un escalar el resultado o uno de los factores. Recordando que $\overline{v} = \dfrac{\overline{d\rho}}{dt}$ se obtiene

$$v = [\overline{\omega}\, \overline{\rho}] \ (*) \qquad [3]$$

(*) Obsérvese que esta fórmula es sólo un caso particular, de la más general, $\dfrac{d\overline{a}}{dt} = \dfrac{\partial\, \overline{a}}{\partial\, t} + [\overline{\omega}\, \overline{a}]$, ya que $\dfrac{\partial\, \overline{\rho}}{\partial\, t} = 0$, por estar A rígidamente unida a O.

El vector $\bar{v}$ no tiene, pues, componente radial y el módulo de su componente tangencial es $\bar{\omega}\,\bar{\rho}$.

La aceleración angular instantánea del punto A será, recordando [2]

$$\bar{\alpha} = \frac{d\,\bar{\omega}}{dt} = \frac{d^2\,\bar{\theta}}{dt}$$

Derivando la expresión [3] respecto de t y recordando que $\bar{a} = \frac{d\bar{v}}{dt}$ se obtiene

$$\bar{a} = [\bar{\alpha}\,\bar{\rho}] + [\bar{\omega}\,\bar{v}]$$

o bien, introduciendo [3]

$$\bar{a} = [\bar{\alpha}\,\bar{\rho}] + [\bar{\omega}\,[\bar{\omega}\,\bar{\rho}]] = [\bar{a}\,\bar{\rho}] - \omega^2\,\bar{\rho} \qquad [4]$$

pues el término $(\bar{\alpha}\,\bar{\rho})\,\bar{\omega}$ es nulo, por ser $\bar{\omega}$ y $\bar{\rho}$ perpendiculares.

Los módulos de las componentes tangencial y radial del vector $\bar{a}$ son $\alpha\,\rho$ y $\omega^2\,\rho$, respectivamente, y el módulo de la aceleración es

$$a = \sqrt{\alpha^2\,\rho^2 + \omega^4\,\rho^2} = \rho\,\sqrt{\alpha^2 + \omega^4}$$

3. Dinámica del movimiento rotatorio de una partícula

Para hallar la fuerza capaz de engendrar un movimiento rotatorio elemental definido por su aceleración angular instantánea, basta aplicar la ley fundamental de la Dinámica, que en este caso y recordando [4] conduce a

$$\varphi = m\bar{a} = m\,[\bar{\alpha}\,\bar{\rho}] - m\,\omega^2\,\bar{\rho} \qquad [5]$$

cuyas componentes tangencial y radial (fuerza centrípeta) tienen por módulos $m\alpha\rho$ y $m\omega^2\rho$, respectivamente.

Nos limitamos por el momento a considerar el caso en que la fuerza f está también contenida en π, ya que el sistema de representación elegido no es adecuado para el caso general. Entonces las dos componentes han de estar también en este plano, es decir, $\bar{\alpha}$ ha de ser perpendicular a $\bar{\rho}$, o sea, tener la misma dirección que $\bar{\omega}$.

Tomando en [5] momentos respecto del centro del giro, tenemos

$$[\bar{\rho}\,\bar{f}] = m\,[\bar{\rho}\,[\bar{\alpha}\,\bar{\rho}]] + m\,\omega^2\,[\bar{\rho}\,\bar{\rho}] = m\,\rho^2\,\bar{\alpha} - m\,(\bar{\alpha}\,\bar{\rho})\,\bar{\rho} + m\,\omega^2\,[\bar{\rho}\,\bar{\rho}]$$

en que son nulos el segundo y tercero términos del último miembro

(recuérdese que $\overline{\alpha}$ y $\overline{\rho}$ son normales). Llamando $\overline{p} = [\overline{\rho}\overline{f}]$ al momento dinámico de la fuerza, que tendrá la misma dirección que el eje de giro, queda

$$\overline{p} = m\,\rho^2\,\overline{\alpha} = I_A\,\overline{\alpha} \qquad [6]$$

en que $I_A = m\rho^2$ es un escalar que sólo depende de la masa de la partícula y de su distancia al eje de giro, y representa la influencia que la inercia del sistema OA presenta frente al movimiento rotatorio producido por $\overline{p}$. Desde este punto de vista se debiera llamar a I_A masa o inercia rotatoria. Sin embargo, se le conoce universalmente por momento de inercia de la partícula A respecto del punto O.

La ecuación [6] representa la ley fundamental del movimiento rotatorio, de la cual se deducirán todas las demás relaciones y está de acuerdo con la experiencia que indica un aumento de resistencia al giro proporcional a ρ^2.

4. Impulso y trabajo rotatorio

Si queremos estudiar el efecto que el momento dinámico $\overline{p}$ ha producido en el tiempo $t_1 - t_0$, durante el que se produjo un desplazamiento angular $\theta_1 - \theta_0$, podemos integrar dicho momento respecto de t o de θ.

a) En el primer caso tenemos, utilizando [6]

$$\int_{t_0}^{t_1} \overline{p}\,dt = I_A \int \overline{\alpha}\,dt = I_A\,(\overline{\omega} - \overline{\omega}_0) = \Delta\,(I_A\,\overline{\omega}) \qquad [7]$$

Al primer miembro se le llama impulso rotatorio, ya que mide el efecto dinámico en un intervalo de tiempo cualquiera, por muy pequeño que éste sea, y sirve igual para momentos finitos actuando durante intervalos finitos que para momentos infinitamente grandes actuando durante intervalos infinitamente pequeños.

El segundo miembro representa la variación del momento tomado respecto de O, de la cantidad de movimiento; magnitud que se denomina momento cinético o momento rotatorio. En efecto,

$$\overline{c} = [\overline{\rho}\,\overline{G}] = m\,[\overline{\rho}\,\overline{v}] = m\,[\overline{\rho}\,[\overline{\omega}\,\overline{\rho}]] = m\,\overline{\omega}\,\rho^2 - m\,\overline{\rho}\,(\overline{\omega}\,\overline{\rho}) = \overline{\omega}\,I_A \qquad [8]$$

ya que el producto escalar $(\overline{\omega}\overline{\rho})$ es nulo, por ser perpendiculares entre sí estos dos vectores. El momento cinético tiene en este caso igual dirección y sentido que la velocidad angular, es decir, tiene la misma dirección que el momento dinámico.

Diferenciando en [7] y teniendo en cuenta [8] se obtiene:

$$\overline{p}\,dt = \mathrm{I}_{\mathrm{A}}\,d\,\overline{\omega} = \overline{dc}$$

Al mismo resultado se llega derivando en [8] respecto del tiempo

$$\frac{d\overline{c}}{dt} = m\,\frac{d}{dt}[\overline{\rho}\,,\,\overline{v}] = m\,[\overline{v},\,\overline{v}] + m\,[\overline{\rho}\,,\,\overline{a}] = [\overline{\rho}\,,\,m\overline{a}] = [\overline{\rho}\,,\,\overline{f}\,] = \overline{p}$$

Queda así demostrada la relación

$$\overline{p} = \frac{d\overline{c}}{dt}$$

que equivale a [6] y de la que deriva la importante ley de conservación del momento cinético en los sistemas aislados, pues si $\overline{p}=0$ el vector $\overline{c}$ debe ser constante en dirección y módulo. Esta condición implica la constancia en dirección y sentido de la velocidad angular.

Al mismo resultado se llega utilizando magnitudes translatorias, aunque por un camino más largo. En efecto,

$$\int \overline{p}\,dt = \int [\overline{\rho}\,\overline{f}\,]\,dt = m\int [\overline{\rho}\,\overline{a}]\,dt = m\int [\overline{\rho}\,d\overline{v}] = m\int [\overline{\rho}\,[\overline{\omega},\,d\,\overline{\rho}]] + m\int [\overline{\rho}\,[d\overline{\omega},\,\overline{\rho}]] =$$

$$= \frac{m}{2}\int \overline{\omega}\,d\,(\rho^2) + m\int \rho^2\,d\,\overline{\omega} - m\int \overline{\rho}\,(\overline{\rho}\,d\,\overline{\omega}) = m\,\rho^2\,(\overline{\omega}_1 - \overline{\omega}_2) = \mathrm{I}_2\,(\overline{\omega}_1 - \overline{\omega}_0)$$

pues $\rho^2 = \text{cont}$ y $\overline{\rho}$ es normal a $d\,\overline{\omega}$.

b) En el segundo caso hallamos:

$$\int_{\theta_0}^{\theta_1} \overline{p}\,d\,\overline{\theta} = \mathrm{I}_{\mathrm{A}}\int \overline{\alpha}\,d\,\overline{\theta} = \mathrm{I}_{\mathrm{A}}\int \overline{\omega}\,d\,\overline{\omega} = \frac{\mathrm{I}}{2}\,(\omega^2 - \omega^2) = \Delta\left(\frac{\mathrm{I}_{\mathrm{A}}}{2}\,\omega^2\right)^{(*)} \qquad [9]$$

El primer miembro representa el trabajo realizado, puesto que

$$d\,\mathrm{W} = \overline{f}\,d\overline{l} = f\,[d\,\overline{\theta},\,\overline{\rho}] = [\overline{\rho}\,\overline{f}\,]\,d\,\overline{\theta} = \overline{p}\,d\,\overline{\theta}$$

y el segundo representa la variación de energía cinética del sistema

$$\mathrm{K} = \tfrac{1}{2}\,mv^2 = \tfrac{1}{2}\,m\,[\overline{\omega}\,\overline{\rho}]^2 = \tfrac{1}{2}\,m\,\omega^2\,\rho^2 - \tfrac{1}{2}\,m\,(\overline{\omega}\,\overline{\rho})^2 = \tfrac{1}{2}\,m\,\omega^2\,\rho^2 = \tfrac{1}{2}\,\mathrm{I}_{\mathrm{A}}\,\omega^2 \qquad [10]$$

ya que $\overline{\omega}$ y $\overline{\rho}$ son normales.

(*) Adviértase que $\overline{\alpha} = \dfrac{d\,\overline{\omega}}{dt} = \dfrac{d\,\overline{\omega}}{d\,\overline{\theta}}\,\dfrac{\overline{d\,\theta}}{dt} = \overline{\omega}\,\dfrac{d\,\overline{\omega}}{d\,\overline{\theta}}$

Al mismo resultado [9] se llega utilizando magnitudes translatorias

$$\int \bar{p}\, d\bar{\theta} = \int [\bar{\rho}\, \bar{f}] = m \int [\bar{\rho}\, \bar{a}]\, d\bar{\theta} = m \int \bar{a}\, [d\bar{\theta}, \bar{\rho}] = m \int \bar{a}\, d\bar{\rho} = \bar{m} \int \bar{v} d\bar{v} =$$

$$= \frac{1}{2} \left(m\, \omega^2\, \rho^2 \right)_0^1 = \frac{1}{2}\, \Delta\, (\mathrm{I_A}\, \omega^2)$$

Diferenciando [9] y teniendo en cuenta [10] se obtiene:

$$\bar{p}\, d\,\bar{\theta} = \mathrm{I_A}\, \bar{\omega}\, d\, \bar{\omega} = d\mathrm{K}$$

a cuyo resultado se llega también derivando [10] respecto de θ:

$$\frac{d\mathrm{K}}{d\,\bar{\theta}} = \frac{1}{2}\, \frac{d}{d\,\bar{\theta}}\, (\mathrm{I}\, \omega^2) = \frac{m}{2}\, \frac{d}{d\,\bar{\theta}}\, (\omega^2\, \rho^2) = m\, \rho^2\, \bar{\omega}\, \frac{d\,\bar{\omega}}{d\,\bar{\theta}} + m\, \omega^2\, \bar{\rho}\, \frac{d\,\bar{\rho}}{d\,\bar{\theta}} = m\, \rho^2\, \bar{\alpha}$$

pues $\bar{\rho}$ no depende de $\bar{\theta}$.

Queda así demostrado que

$$\bar{p} = \frac{d\mathrm{K}}{d\,\bar{\theta}}$$

de donde se deriva la ley de conservación de la energía cinética en los sistemas aislados, pues si $\bar{p} = 0$, el escalar K debe permanecer constante.

Obsérvese finalmente que, recordando [8], se llega a

$$\bar{\omega}\, \bar{c} = \omega^2\, \mathrm{I_A} = 2\, \mathrm{K}$$

5. Extensión al cuerpo rígido con un eje fijo

Si se trata de un sistema de partículas unidas rígidamente entre sí y sometidas a girar alrededor de un cierto eje, podremos aplicar las fórmulas anteriores a cada uno de los planos normales al eje y por extensión al cuerpo rígido entero. Para la partícula A_s se tiene, entonces,

$$\bar{v}_s = [\bar{\omega}\, \bar{\rho}_s]$$

en que ω es la velocidad angular común a todas las partículas y $\bar{\rho}_s$ es la perpendicular levantada desde el eje de giro pasando por la partícula A_s.

La ecuación fundamental del movimiento rotativo es:

$$\sum_s \bar{p}_s = \sum_s m_s\, \rho_s^2\, \bar{\alpha} = \bar{\alpha} \sum_s m_s\, \rho_s^2 = \bar{\alpha}\, \mathrm{I}$$

en que $I = \sum_s m_s \rho_s^2$ es el momento de inercia del cuerpo respecto de su eje de giro, teniendo los vectores ρ_s la significación que se acaba de explicar. Si llamamos f_s y f'_s a las fuerzas exteriores e interiores que actúan sobre A_s, y habida cuenta de que $\Sigma f'_s = 0$, se obtiene, finalmente,

$$\overline{P} = \sum_s \overline{p}_s = \sum_s [\overline{\rho}_s \overline{f}_s] = \overline{\alpha}\, I$$

en que $\overline{P}$ es el momento dinámico total, debido a las fuerzas exteriores.

El impulso rotatorio es ahora

$$\sum_s \int_{t_0}^{t_1} \overline{p}_s\, dt = \Delta (I\, \overline{\omega})$$

y el trabajo realizado

$$\sum_s \int_{\theta_1}^{\theta_1} \overline{p}_s\, d\,\overline{\theta} = \Delta \left(\frac{I}{2}\, \omega^2 \right)$$

6. ROTACIÓN DE UNA PARTÍCULA EN TORNO A UN PUNTO CUALQUIERA

Al estudiar el caso general del movimiento rotatorio de una partícula, no debe tomarse por origen de coordenadas O el centro de giro C, aunque sí un punto situado sobre el eje instantáneo de giro. En un intervalo diferencial de tiempo este movimiento habrá tenido lugar en un plano π perpendicular a este eje, en el que están los puntos C, A y A′. Si designamos por $\overline{r}$ a la coordenada vectorial OA se verifica, análogamente a [1],

$$d\overline{r} = [d\,\overline{\theta}\, r]$$

ya que el módulo de $dr = d\rho$ es $\rho d\theta = r \operatorname{sen} \alpha d\theta$, y su dirección es la misma que en [1], ya que el plano $d\rho\ \theta$ coincide con el $d\theta\ r$.

La magnitud dirigida así definida es un vector, pues la suma de dos desplazamientos angulares elementales alrededor de ejes que pasan por un punto C es otro desplazamiento angular elemental alrededor de un eje que pasa por el punto C, está en el plano de los otros dos ejes y forma con ellos ángulos inversamente proporcionales a los desplazamientos respectivos. Desde luego esta representación no será extensible a desplazamientos angulares fini-

tos, salvo en el caso ya estudiado en que queda restringido el movimiento de rotación a un plano único (*).

Observando que, ahora, $\overline{v} = \frac{d\overline{r}}{dt}$ se obtiene, análogamente a [3]

$$\overline{v} = [\overline{\omega}\,\overline{r}]$$

En cuanto a la aceleración, se obtiene una expresión más complicada que [4]

$$\overline{a} = [\overline{\alpha}\,\overline{r}] + [\overline{\omega}\,\overline{v}] = [\overline{\alpha}\,\overline{r}] + [\overline{\omega}\,\overline{r}]\,\overline{\omega} - \omega^2\,\overline{r}^2 \qquad [11]$$

ya que ahora $\overline{\omega}$ y $\overline{r}$ no son perpendiculares.

La fuerza necesaria para engendrar un movimiento con esta aceleración vendrá expresada por

$$\overline{f} = m\overline{a} = m\,[\overline{\alpha}\,\overline{r}] + m\,[\overline{\omega}\,\overline{r}]\,\overline{\omega} - m\,\omega^2\,\overline{r} \qquad [12]$$

y ya no ha de estar contenida en el plano de giro y, por lo tanto, $\overline{\alpha}$ no tiene la dirección de $\overline{\rho}$.

Tomando en esta expresión momento respecto del centro de coordenadas, se tiene

$$\overline{p} = [\overline{r}\,\overline{f}] = m\,[\overline{r}\,[\overline{\alpha}\,\overline{r}]] + m\,(\overline{\omega}\,\overline{r})\,[\overline{r}\,\overline{\omega}] - m\,\omega^2\,[\overline{r}\,\overline{r}] =$$

$$= mr^2\,\overline{\alpha} - m\,(\overline{\alpha}\,\overline{r})\,\overline{r} - m\,(\overline{\omega}\,\overline{r})\,[\overline{\omega}\,\overline{r}] = mr^2\,\frac{d\,\overline{\omega}}{dt} - m\left(\frac{d\,\overline{\omega}}{dt}\,\overline{r}\right)\overline{r} + \qquad [13]$$

$$+ \left[\overline{\omega},\, m\left(\overline{r}^2\,\overline{\omega} - (\overline{\omega}\,\overline{r})\,\overline{r}\right) = \frac{d}{dt}\left(mr^2\,\overline{\omega} - m\,(\overline{\omega}\,\overline{r})\,\overline{r}\right)\right]$$

puesto que

$$[\overline{\omega},\, r^2\,\overline{\omega}] = r^2\,[\overline{\omega}\,\overline{\omega}] = 0 \qquad [\overline{\omega},\, \overline{\omega}\,\overline{r})\,\overline{r}] = (\overline{\omega}\,\overline{r})\,[\overline{\omega}\,\overline{r}]$$

y por ser la derivada total de un vector, habida cuenta del movimiento de los ejes

$$\frac{d\overline{a}}{dt} = \dot{\overline{a}} + [\overline{\omega}\,\overline{a}]$$

Por tanto,

$$\rho_i = \frac{d}{dt}\,m\,(r_j^2\,\omega_i - \omega_j\,r_j\,r_i) = \frac{d}{dt}\,(\mathfrak{I}_{ij}\,\omega_j)$$

(*) Consúltense, p. o., los apuntes de *Mecánica teórica* del profesor Navarro Borrás, págs. 57, 61 y 65.

siendo

$$\mathfrak{J}_{ij} = m\,\delta_{ij} \sum_k r_k^2 - m r_i r_j$$

7. Rotación de un cuerpo rígido libre

Al extender los anteriores razonamientos a un cuerpo rígido animado de un movimiento de rotación elemental alrededor de un eje instantáneo, sólo es necesario tener en cuenta, como en 5, que $\sum_s f'_s = 0$ y, también; $\sum_s [\overline{r}_s \overline{f}'_s] = 0$

$$\overline{P} = \sum_s \overline{p}_s = \sum_s [\overline{r}_s \overline{f}_s] = \frac{d}{dt} \sum_s m_s \left(r_s^2\, \overline{\omega} - (\overline{\omega}\, \overline{r}_s)\, \overline{r}_s\right) = \frac{d}{dt} (\mathfrak{J}\, \overline{\omega})$$

en que

$$\mathfrak{J}_{ji} = \delta_{ij} \sum_s m_s \sum_k r_{sk}^2 - \sum_s m_s r_i r_j$$

Es fácil comprobar que $\mathfrak{J}\, \overline{\omega}$ es, precisamente, el momento cinético, pues

$$\overline{C} = \sum_s \overline{c}_s = \sum_s m_s [\overline{r}_s \overline{v}_s] = \sum_s m_s \left[\overline{r}_s [\overline{\omega}, \overline{r}_s]\right] = \sum_s m_s \left(r_s^2 \overline{\omega} - m_s (\overline{\omega}\, \overline{r}_s) \overline{r}_s\right) = \mathfrak{J}\overline{\omega}$$

Adviértase que en este caso $\overline{C}$ no tiene la misma dirección que $\overline{\omega}$ como tampoco coinciden en dirección $\overline{P}$ y $\overline{\alpha}$. Solamente cuando $\overline{\omega}$ o $\overline{\alpha}$ coinciden con una de las direcciones principales del tensor $\mathfrak{J}$ se verifican estas coincidencias.

En cuanto al impulso, es ahora

$$\int_{t_0}^{t_1} P\, dt = \int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{dt} (\mathfrak{J}\, \overline{\omega})\, dt = \mathfrak{J}\, (\overline{\omega}_1 - \overline{\omega}_0) = \Delta\, (\mathfrak{J}\, \overline{\omega})$$

y sigue verificándose

$$\overline{P} = \frac{d\,\overline{C}}{dt}$$

El trabajo realizado es ahora

$$\int_{\theta_0}^{\theta_1} \overline{P}\, d\,\overline{\theta} = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{d}{dt} (\mathfrak{J}\, \overline{\omega})\, d\,\overline{\theta} = \int_{\theta_1}^{\theta_1} \overline{\omega}\, d\, (\mathfrak{J}\, \overline{\omega}) = \frac{\mathfrak{J}}{2} (\omega_1^2 - \omega_0^2) = \Delta \left(\frac{\mathfrak{J}}{2}\, \omega^2\right)$$

y también sigue válida la relación

$$P = \frac{dK}{d\,\overline{\theta}}$$

en que

$$K = \frac{1}{2} \sum_s m_s v_s^2 = \frac{1}{2} \mathfrak{J} \omega^2$$

Respecto a la posición sobre el eje instantáneo de giro del origen de coordenadas O, es indiferente, por lo que en los cuerpos libres de ligaduras conviene elegir el centro de gravedad. En efecto, sea $\bar{b}$ el vector distancia entre O y G, y llamemos ahora r_s a la coordenada vectorial de la partícula A_s respecto de G. La anterior ecuación, escrita respecto de O, es

$$\bar{\sum_s} [(\bar{b}+\bar{r}_s), \bar{f}_s] = [\bar{b}, \sum_s \bar{f}_s] + \sum [\bar{r}_s \bar{f}_s] = \frac{d}{dt} \sum_s \Big(m_s (\bar{b} + \bar{r}_s)^2 \bar{\omega} - m_s \big(\bar{\omega} (\bar{b} + \bar{r}_s)\big) \overline{b+r_s} \Big) =$$

$$= \frac{d}{dt} \sum_s \big(m_s b^2 \bar{\omega} + m_s r^2_s \bar{\omega} + 2 m_s \bar{b} \bar{r}_s \bar{\omega} - m_s (\bar{\omega} \bar{b}) \bar{b} - m_s (\bar{\omega} \bar{t}) \bar{r}_s - m_s (\bar{\omega} \bar{r}_s) \bar{b} - m_s (\bar{\omega} \bar{r}_s) \bar{r}_s$$

que teniendo en cuenta que $\bar{r}_s$ está referida al centro de gravedad, se reduce a

$$[\bar{b}, \sum_s \bar{f}_s] + \sum_s [\bar{r}_s \bar{f}_s] = \frac{d}{dt} M \big(b^2 \bar{\omega} - (\bar{\omega} \bar{b}) \bar{b} \big) + \frac{d}{dt} \sum_s m_s \big(r_s^2 \bar{\omega} - (\bar{\omega} \bar{r}_s) \bar{r}_s \big)$$

pero para el centro de gravedad se verifica, recordando [11] y [13]

$$\sum \bar{f}_s = M \frac{d^2 \bar{b}}{dt^2} = M \bar{a}_b = M [\bar{\alpha} \bar{b}] + M (\bar{\omega} \bar{b}) \bar{\omega} - M \omega^2 \bar{r}$$

de donde

$$\bar{P} = [\bar{b}, \sum \bar{f}_s] = \frac{d}{dt} M \big(b^2 \bar{\omega} - (\bar{\omega} \bar{b}) b \big)$$

y sólo queda

$$\sum_s [\bar{r}_s \bar{f}_s] = \frac{d}{dt} \sum_s m_s \big(r_s^2 \bar{\omega} - (\bar{\omega} \bar{r}_s) \bar{r}_s \big)$$

tal como queríamos demostrar.

De manera paralela se demuestra que el momento cinético y la energía cinética de rotación son independientes del origen de coordenada y pueden referirse al centro de gravedad.

Así, por ejemplo,

$$K = \frac{1}{2} \sum_s (\dot{\bar{b}} + \dot{\bar{r}}_s)^2 = \frac{1}{2} \sum_s m_s (\dot{\bar{b}} + \dot{\bar{r}}_s - 2 \dot{\bar{b}} \dot{\bar{r}}_s) =$$

$$= \frac{1}{2} M \dot{b}^2 + \frac{1}{2} \sum_s m_s \dot{r}_s^2 + \dot{\bar{b}} \sum_s m_s \dot{\bar{r}}_s$$

en que el primer término es la energía de translación del sólido en bloque y el tercero es nulo por estar $\bar{r}_s$ referida al centro de gravedad.

8. Propiedades de los distintos vectores introducidos

Examinemos ahora los campos de vectores que hemos considerado:

En primer lugar, la velocidad angular $\bar{\omega}$ es un vector polar que, por ser el cuerpo rígido, es constante en el espacio. Lo mismo ocurre con la aceleración angular $\bar{\alpha}$.

La velocidad lineal $\bar{v}$ es un vector solenoidal, pues

$$\operatorname{div} \bar{v} = \nabla [\bar{\omega}\, \bar{r}] = \bar{r} [\nabla\, \bar{\omega}] - \bar{\omega} [\nabla\, \bar{r}] = 0$$

ya que $\bar{\omega} = \text{const.}$ y $\bar{r}$ es un vector irrotacional, como es fácil comprobar. Interesa calcular el rotacional de la velocidad

$$\operatorname{rot} \bar{v} = \left[\nabla [\bar{\omega}\, \bar{r}]\right] = \bar{\omega} (\nabla \bar{r}) + (\bar{r}\, \nabla)\, \bar{\omega} - \bar{r} (\nabla\, \bar{\omega}) - (\bar{\omega}\, \nabla)\, \bar{r} = 3\, \bar{\omega} - \bar{\omega} = 2\, \bar{\omega}$$

pues $\nabla \bar{r} = 3$ y $(\bar{a}\, \nabla)\, \bar{r} = \bar{a}$.

Resulta así la importante relación

$$\bar{\omega} = \frac{1}{2} \operatorname{rot} \bar{v}$$

que indica que el potencial vector de $\bar{\omega}$ es $\dfrac{\bar{v}}{2}$.

Estas mismas relaciones se obtienen partiendo de $\nabla \bar{r} = 3$ y $[\nabla\, \bar{r}] = 0$, pues

$$\frac{d}{dt} (\nabla \bar{r}) = \frac{d\, \nabla}{dt} \bar{r} + \nabla\, \bar{v} = 0, \qquad \frac{d}{dt} [\nabla\, \bar{r}] = \left[\frac{d\, \nabla}{dt}, \bar{r}\right] + [\nabla, \bar{v}] = 0$$

y como $\dfrac{d\, \nabla}{dt} = [\bar{\omega}\, \nabla]$, ya que en [22] $\dfrac{\partial\, \nabla}{\partial\, t} = 0$, por ser constante el módulo de ∇, queda

$$\nabla\, \bar{v} = - [\bar{\omega}\, \nabla]\, \bar{r} = - \bar{\omega}\, [\nabla\, \bar{r}] = 0$$

$$[\nabla\, \bar{v}] = - \left[[\bar{\omega}\, \nabla]\, \bar{r}\right] = - \nabla\, (\bar{\omega}_c\, \bar{r}) + \bar{\omega}\, (\nabla\, \bar{r}) = - \bar{\omega} + 3\, \bar{\omega} = 2\, \bar{\omega}$$

El campo de aceleraciones es irrotacional y nos permite hallar el módulo de la velocidad angular, pues derivando la anterior respecto de t

$$\frac{d}{dt}(\nabla \bar{v}) = \frac{d\nabla}{dt}\bar{v} + \nabla \bar{a} = [\bar{\omega}\nabla]\bar{v} + \nabla \bar{a} = 0$$

de donde

$$\nabla \bar{a} = -\bar{\omega}[\nabla \bar{v}] = -2\omega^2$$

es decir,

$$|\omega| = \sqrt{-\tfrac{1}{2}\operatorname{div} a}$$

En cuanto al rotacional, se halla por el mismo camino

$$\frac{d}{dt}[\nabla \bar{v}] = \left[\frac{d\nabla}{dt}\bar{v}\right] + [\nabla \bar{a}] = [[\bar{\omega}\nabla]\bar{v}] + [\nabla \bar{a}] = 0$$

de donde

$$[\nabla \bar{a}] = -\left[[\bar{\omega}\nabla]\bar{v}\right] = -\nabla(\bar{v}\bar{\omega}_c) + \bar{\omega}(\nabla \bar{v}) =$$

$$= -\left[\bar{\omega}[\nabla \bar{v}]\right] - (\bar{\omega}\nabla)\bar{v} + \bar{\omega}(\nabla \bar{v}) = -2[\bar{\omega},\bar{\omega}] = 0$$

La divergencia del momento cinético vale

$$\operatorname{div}\bar{c} = \nabla[\bar{r}, m\bar{v}] = m\nabla[\bar{r},\bar{v}] = m\bar{v}[\nabla \bar{r}] - m\bar{r}[\nabla \bar{v}] = -2m\bar{r}\bar{\omega}$$

a cuyo resultado se llega igualmente partiendo de $\bar{c} = m(r^2\bar{\omega} - (\bar{\omega}\bar{r})\bar{r})$

$$\operatorname{div}\bar{c} = m\nabla(r^2\bar{\omega}) - m\nabla\left((\bar{\omega}\bar{r})\bar{r}\right) =$$

$$= m\bar{\omega}\nabla r^2 + m r^2\nabla\bar{\omega} - m\bar{r}\nabla(\bar{\omega}\bar{r}) - m(\bar{\omega}\bar{r})\nabla\bar{r} =$$

$$= 2m\bar{\omega}\bar{r} - m\bar{\omega}\bar{r} - 3m\bar{\omega}\bar{r} = -2m\bar{\omega}\bar{r}$$

En cuanto al rotacional,

$$\operatorname{rot}\bar{c} = [\nabla[\bar{r}, m\bar{v}]] = m[\nabla[\bar{r}\bar{v}]] = m\bar{r}(\nabla\bar{v}) + m(\bar{v}\nabla) + m(\bar{v}\nabla)\bar{r} - m v(\nabla\bar{r}) - (\bar{r}\nabla)\bar{v} =$$

$$= m\bar{v} - 3m\bar{v} - m\bar{v} = -3m\bar{v} \quad (*)$$

(*) Para calcular $(\bar{r}\nabla)\bar{v}$, es preferible derivar $(\bar{r}\nabla)\bar{r} = \bar{r}$, de donde sale

$$(\bar{r}\nabla)\bar{v} = -(\bar{r}[\omega\nabla])\bar{r} = ([\bar{\omega}\bar{r}]\nabla)\bar{r} = \bar{v}$$

o también

$$\operatorname{rot} \bar{c} = m[\nabla, r^2 \bar{\omega}] - m[\nabla, (\bar{\omega} \bar{r}) \bar{r}] = m[\nabla r^2, \bar{\omega}] + m r^2 [\nabla \bar{\omega}] - [\nabla (\bar{\omega} \bar{r}), \bar{r}] - m(\bar{\omega} \bar{r})[\nabla \bar{r}] =$$

$$= 2m \overline{[r \bar{\omega}]} - m[\omega \bar{r}] = -3 m\bar{v} = -3 \bar{G}$$

de donde resulta la importante relación

$$\bar{G} = -\frac{1}{3} \operatorname{rot} \bar{c}$$

es decir, el vector G es solenoidal y su potencial vector es $-\frac{\bar{c}}{3}$.

El estudio del vector momento dinámico puede hacerse sin más que derivar respecto al tiempo las fórmulas obtenidas para el momento cinético. Así, para la divergencia se obtiene

$$\frac{d}{dt}(\nabla \bar{c}) = [\bar{\omega} \nabla] \bar{c} + \nabla \bar{p} = -2 m\bar{v} \bar{\omega} - 2 m\bar{r} \bar{\alpha} = -2 m\bar{r} \bar{\alpha}$$

de donde

$$\nabla \bar{p} = -2 m\bar{r} \bar{\alpha} - \bar{\omega} [\nabla \bar{c}] = -2 m\bar{r} \bar{\alpha} + 3 m \bar{\omega} \bar{v}$$

En cuanto al rotacional

$$\frac{d}{dt}[\nabla \bar{c}] = \left[[\bar{\omega} \nabla] \bar{c}\right] + [\nabla \bar{p}] = -3 m\bar{a} - \left[[\bar{\omega} \nabla] \bar{c}\right] = -3 m\bar{a} - \nabla (\bar{\omega} \bar{c}) + \bar{\omega} (\nabla \bar{c})$$

pero

$$\nabla (\bar{\omega} \bar{c}) = \left[\bar{\omega} [\nabla \bar{c}]\right] + (\bar{\omega} \nabla) \bar{c} = -3m[\bar{\omega} \bar{v}] + m\bar{v}(\bar{r} \omega) - m \omega^2 \bar{r} = 4 m \bar{\omega} (\bar{r} \bar{\omega}) - 4 m \omega^2 \bar{r}$$

ya que

$$(\bar{\omega} \nabla) \bar{c} = [\nabla (\bar{c} \bar{\omega})] + \bar{\omega} (\nabla \bar{c}) = m[\nabla, \bar{v}(\bar{r} \bar{\omega})] + \bar{\omega} (\nabla \bar{c}) = m(\bar{r} \bar{\omega})[\nabla \bar{v}] + m[\nabla (\bar{r} \bar{\omega}), \bar{r}] + \bar{\omega} (\nabla \bar{c}) =$$

$$= 2 m \bar{\omega} (\bar{r} \bar{\omega}) - m \bar{\omega} (\bar{r} \bar{\omega}) + m \bar{r} \omega^2 - 2 m \bar{r} \omega^2 = m \bar{\omega} (\bar{r} \bar{\omega}) - m \omega^2 \bar{r}$$

de donde se obtiene, finalmente,

$$[\nabla p] = -3 m\bar{a} - 4 m \bar{\omega} (\bar{r} \bar{\omega}) - 4 m \omega^2 \bar{r} - 2 m \omega^2 \bar{r}$$

$$= -3 m \overline{[\alpha r]} - 7 m \bar{\omega} (\bar{r} \bar{\omega}) + 5 m \omega^2 \bar{r}$$

9. Estado tensorial del problema

En realidad, el vector polar elemental $d\bar{\theta}$ que hemos introducido es, como toda superficie, un tensor hemisimétrico elemental

$$\Theta = \begin{vmatrix} 1 & -d\,\theta_3 & d\,\theta_2 \\ d\,\theta_3 & 1 & -d\,\theta_1 \\ -d\,\theta_2 & d\,\theta_1 & 1 \end{vmatrix}$$

y la velocidad angular $\bar{\omega}$ es otro tensor hemisimétrico elemental (capacidad vectorial) obtenido del anterior al dividir dt

$$\Omega = \begin{vmatrix} 1 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 1 & -\omega_1 \\ \omega_2 & \omega_1 & 1 \end{vmatrix}$$

Entonces se verifica

$$d\bar{r} = \Theta\, r$$

$$\bar{v} = \Omega\, \bar{r}$$

de donde

$$a = \frac{d}{dt}\,(\Omega\, \bar{r})$$

y la fórmula fundamental del movimiento rotatorio es

$$\mathrm{P} = \frac{d}{dt}\,(\mathfrak{J} \cdot \Omega)$$

es decir, el momento dinámico es igual a la derivada temporal del producto contraído del tensor simétrico $\mathfrak{J}$, momento de inercia, por el tensor hemisimétrico Ω, velocidad angular.

Instituto de Optica «Daza de Valdés».

40. DIAGRAMAS DE POLVO CON CRISTAL UNICO, *por* J. L. AMOROES y M. S. AHMED

SUMMARY

A usual dust-chamber suffers from many defects when detecting substances by means of «dust-diagrams» with one only crystal. These defetcs are eliminated applying the operantig technique indicaed below.

Es ya sobradamente conocido que el mejor método de identificación de una sustancia es el estudiarla mediante un diagrama de polvo. No obstante, muchas veces el investigador sólo posee pequeñas cantidades de la sustancia o, lo que es peor, unos cuantos cristalitos que, la mayor parte de las veces, piensa utilizarlos para más cuidadosas investigaciones. En estos casos es imposible obtener el polvo suficiente para identificar la sustancia.

Recientemente se ha hablado de la posibilidad de obtener diagramas de tal naturaleza empleando cristal único (Bannister, Nature, 1947). En estos casos se hace uso de la corriente cámara de polvo, y en vez del preparado pulverizado se emplea un cristal único ligeramente desplazado de la vertical. La utilización de una cámara corriente de polvo adolece de un defecto: es posible perder alguna de las líneas del diagrama porque las interferencias correspondientes a ella caigan por fuera del film. Por ello creemos que es mucho más conveniente emplear placa plana para la obtención de los diagramas en cuestión. La ventaja de este modo de operar reside en lo siguiente:

a) Todas las líneas importantes del diagrama aparecen en alguna de las zonas de la película.

b) Es posible recomponerlas, aun en el caso de tener pocas interferencias, pues las líneas son siempre circunferencias concéntricas.

c) El diámetro de las mismas es fácilmente determinable, con lo que la medición del diagrama ofrece gran seguridad.

En la figura 1 puede verse un diagrama de polvo de hexamina obtenido con cristal único. La figura 2 es un Lauediagrama del mis-

mo cristal para demostrar la inclinación del eje cristalográfico con respecto al eje de giro.

La técnica operatoria es como sigue: Una vez centrado el cristal, colóquense las correderas de la cabeza goniométrica de tal manera, que una de ellas sea paralela al rayo Rontgen, con lo que la otra será normal al mismo. Desplácese la vertical del cristal 10° en ambas correderas. Obténgase el diagrama como de costumbre, girando el cristal.

Hemos de agradecer aquí a Miss Kathleen Lonsdale la posibilidad de haber obtenido los diagramas en cuestión en su Laboratorio del University College, en Londres.

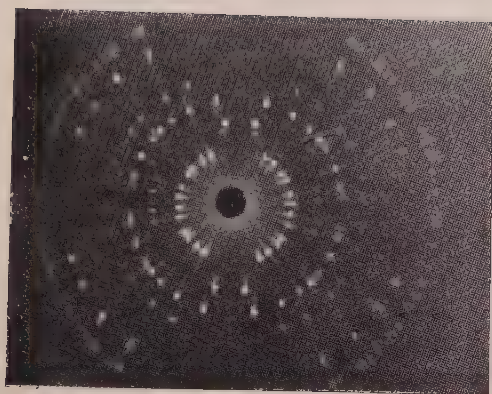


Figura 1

Diagrama de polvo de hexamina obtenido con cristal único.

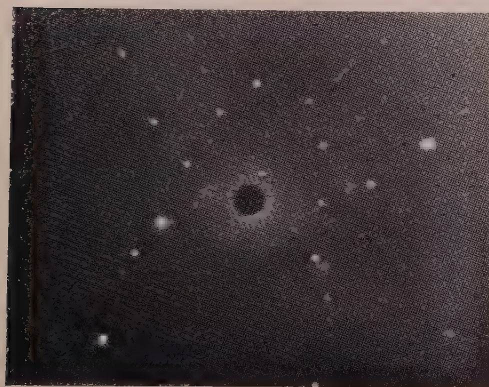


Figura 2

Diagrama del cristal que sirvió para obtener la figura 1.

BIBLIOGRAFIA

LIBROS:

L. C. MARTIN.—*Technical Optics*, tomo I.—Sir Isaac Pitman & Sons. London, 1948. 343 págs.

El Profesor Martin, veterano en la enseñanza y en la investigación de la Optica Británica, realiza en este libro una considerable ampliación y renovación de su clásico «Introduction to Applied Optics», con el que han aprendido Optica Técnica tantas generaciones de ingenieros ingleses. El Profesor Martin desarrolla en este primer volumen toda la Optica Geométrica con una ligera introducción al cálculo de sistemas, incluyendo las nociones de Optica Física necesarias para comprender el mecanismo real de la formación de las imágenes así como de las leyes de la radiación.

Es muy notable el capítulo V, dedicado a la visión, que es tratada con una extensión grande, incluyendo todo lo que precisa conocer el futuro proyectista de instrumentos, del ojo en su triple aspecto de instrumento óptico, receptor de radiaciones y analizador cromático. En él, con algunas omisiones —principalmente en lo referente a la visión nocturna—, hace una exposición moderna de las materias antes enunciadas con una profundidad y lucidez rara en libros de la clase del que nos ocupa.

También es muy notable el capítulo IV, dedicado a la imagen óptica y sus defectos, y aquí aparece la labor personal del Profesor Martin sobre el reparto de luz en la imagen óptica, teniendo en cuenta aberraciones y difracciones. La parte técnica, referente a la fabricación de elementos ópticos se expone también con modernidad, y en conjunto creemos que el libro ha ganado considerablemente sobre su versión original, esperando con impaciencia que aparezca el segundo volumen, que ha de tratar de los instrumentos, singularmente de los clásicos (anteojos, objetivos fotográficos y microscopios). En conjunto es una obra recomendable como libro de texto para todos aquellos físicos e ingenieros que quieran tener una buena introducción a los fundamentos del proyecto, modo de funcionar y fabricación de sistemas ópticos.

J. M. O.

SIR JAMES JEANS.—*The Growth of Physical Science*.—Cambridge University Press, 1947.—364 págs.

Se nos ofrece aquí el último libro de este conocido astrónomo y vulgarizador, que murió en septiembre de 1946, poco después de revisar las pruebas de esta obra póstuma. En este libro el autor desea, evidentemente, mantener la línea de libros para el gran público, sostenida con tanto acierto en obras anteriores. Tal como él dice en el prólogo, el libro está destinado a lectores con cierta cultura general y a quienes comienzan el estudio de la Física u otra disciplina con ella ligada.

Bajo el título de ciencia física se incluyen en esta historia las matemáticas, elemento indispensable para el desarrollo de aquélla, y la Astronomía, ligada íntimamente al fallecido Jeans y a la que se le dedican no menos de 110 páginas, casi la tercera parte del libro, lo cual está, evidentemente, fuera de toda medida.

Las primeras 120 páginas están dedicadas a los balbuceos de la ciencia en Babilonia, Egipto, Fenicia, Grecia, Alejandría y la Edad Media. Constituyen lo mejor y más ameno del libro, quizá por ser la parte escrita con más tranquilidad y sin preocupaciones de espacio.

En cambio, sólo se dedican un centenar de páginas a los siglos XVI y XVII, en que la moderna ciencia nace y se consolida con Newton. Los dos siglos posteriores a Newton quedan contenidos en unas 60 páginas. Evidentemente, los asuntos aquí están tratados más ligeramente y de una manera menos clara. La abundancia de asunto complica aún más esta parte, que no consigue dar una idea clara de las diversas aportaciones valoradas comparativamente a las que le siguieron y precedieron.

En las 70 páginas finales se intenta hacer un bosquejo de la física moderna, pero el texto queda recargado con un gran número de nombres y de palabras técnicas que hacen su lectura difícil para los no iniciados en el conocimiento físico y no añaden nada a los iniciados.

Salvo en las partes dedicadas a Astronomía, el texto resulta falto de criterio y de vida, reduciéndose a una recopilación y resumen de otras fuentes, lo cual, por otra parte, era preciso, dada la falta de trabajos históricos del autor. Añádase, además, la fantástica manera de escribir ciertos nombres, sobre todo medievales, y las numerosas inexactitudes históricas, para dejar bien sentado que el libro no ha sido escrito por un historiador.

Pero tampoco lo fué por un filósofo. La mayor parte de las aportaciones no están debidamente comentadas, y no se logra la promesa del prólogo de dar a conocer qué ha hecho y qué ha de hacer la ciencia. El libro termina sin una sola línea comentando las posibilidades e implicaciones de la epistemología y la física modernas, tema éste tan apasionante para el lector profano como las propias conquistas de las teorías físicas.

Para citar un caso concreto de la falta de criterio nos referiremos a la Estática. La aportación de Arquímedes, que se adelantó setecientos años a su época en la utilización del método científico, queda prácticamente silenciada, ya que sólo se menciona la anécdota de la corona de oro. Sin citar tampoco los trabajos de Jordano de Nemore, mencionando muy ligeramente a Leonardo de Vinci, el gran precursor de Galileo, desordenado y versátil como tantos, establece la fundación de la Estática por Simeón Stevin, llegando a atribuirle el descubrimiento del principio de desplazamientos virtuales, contenido ya en la obra de Aristóteles y, sobre todo, de Leonardo.

Mención especial, y no precisamente laudatoria, merece lo inadecuado y fuera de lugar de una serie de párrafos con los que han intentado llevar al ánimo del lector que la religión, y en particular el cristianismo, han constituído en todo momento un obstáculo para el progreso de la ciencia. Se encuentran afirmaciones como «cuando abrazaron la fe cristiana comienza la edad negra de Europa, en que todo el pensamiento humano y la mayor parte de sus actividades estaban dominadas por los presbíteros, edad que debe ser colocada en cuanto a virtudes intelectuales por debajo de cualquier otro período de la historia de la humanidad». Evidentemente, esta afirmación completamente gratuita está fuera de lugar en una Historia de la Ciencia y ha sido emitida olvidando nombres como San Isidoro y San Alberto Magno, los monjes Rogerio Bacon y Domingo de Soto, y los obispos Nicolás de Oresme y Nicolás de Cusa, sin cuya labor no habrían podido existir Leonardo, Galileo, Huygen, etc.

Pero los comentarios se extienden hasta explicar que la conversión del Emperador Constantino fué debida a una superstición y a mencionar el corte de orejas, narices, lenguas y brazos a los herejes. Ambos, totalmente fuera de lugar y demostrando un mal gusto y una torva intención que hacen ciertamente desmerecer a la última obra de Jeans.

Como conclusión podemos afirmar que Jeans ha conseguido, al menos en su primera parte, un libro de lectura fácil y agradable (salvando las incorrecciones ortográficas y religiosas mencionadas), del que un lector no iniciado podrá sacar algunos datos cronológicos útiles, especialmente del índice alfa-

bético, muy completo. Pero ha fracasado en su deseo de ofrecer al estudiante una visión de conjunto de las ciencias físicas y de lo que éstas pueden significar. Este formará una imagen perturbada y fría del desarrollo de la ciencia física, o no encontrará nada nuevo, máxime si tiene a mano obras anteriores, asequibles a sus conocimientos, como Crew: Rise of Modern Physics; Cajori: History of Physics; Singer: A Short History of Science, y Dompier: A History of Science.

L. V.

REVISTAS:

The Physical Review

Vol. 73. Núm. 7. Abril 1948.

H. H. BARSCHALL, C. K. BOCKEMAN y L. W. SEAGONDOLLAR.—Total cross section of Fe, Ni and Bi for fast neutrons (659).
T. W. BONNER y J. E. EVANS.—Resonances in the disintegration of fluorine and lithium by protons (666).
J. C. JACOBSEN y O. KOFOED-HANSEN.—On the recoil of the nucleus in beta-decay of Kr^{88} (675).
N. BLOEMBERGEN, E. M. PURCELL y R. V. POUND.—Relaxation effects in nuclear magnetic resonance absorption (679).
J. W. SIMMONS y W. GORDY.—Structure of the inversion spectrum of ammonia (713).
J. E. NAFE y E. B. NELSON.—Hyperfine structure of hydrogen and deuterium (718).
H. A. FAIRBANK, C. T. LANE, L. T. ALDRICH y A. O. NIER.—Distribution of He between liquid and vapor He^4 (729).
L. J. RAINWATER, W. W. J. R. DUNNING y C. S. WU.—Slow neutron velocity spectrometer studies of H, D, F, Mg, S, Si and Quartz (733).
W. W. CHUPP, E. GARDNER y T. B. TAYLOR.—Energy distribution from a target bombarded by 190-mev deuterons (742).
A. RADKOWSKY.—Temperature dependence of electron energy levels in solids (749).
W. G. POLLARD y R. D. PRESENT.—Oon gaseous self-diffusion in long capillary tubes (762).
L. HALL.—Origin of ultrasonic absorption in water (775).
A. WINTNER.—On Dirac's Theory of continuous spectra (781)
A. H. TAUB.—Orbits of charged particles in constant fields (786).
L. B. LOEB.—Threshold for the positive pre-ouset burst pulse corona and the production of ionizing photons in air at atmospheric pressure (798).
E. TELLER.—On the change of physical constants (801).

Vol. 73. Núm. 8. Abril 5, 1948.

E. BRETCHER, A. P. FRENCH y F. G. P. SEIDL.—Low energy yield of $D(D,p)H^3$ and the angular distribution of the emitted protons (815).
E. O. KOMOPINSKI y E. TELLER.—Theoretical consideration concerning the D+D reactions (822).
C. G. SHULL y E. O. WOLLAN.—Diffraction of neutrons by crystalline powders (830).
C. G. SHULL, E. O. WOLLAN, G. A. MORTON y W. L. DAVIDSON.—Neutron diffraction studies of NaH and NaD (842).

C. E. MANDEVILLE y M. V. SCHERB.—Radiations from molydenun (99) and technetium (99) (848).
J. O. HIRSCHFELDER, J. L. MAGEE, M. H. HULL.—Penetration of gamma-radiation through tihck layers. I Plane geometry, Klein-Nishina scattering (852).
J. O. HIRSCHFELDER y E. N. ADAMS.—Idem II Plane geometry, iron and lead (863).
G. BREIT, A. A. BROYLES y M. H. HULL.—Sensitivity of proton-proton scattering to potentials at different distances (869).
J. J. HOPFIELD y H. E. CLEARMAN.—Ultraviolet spectrum of the sun from V-2 rockets (877).
T. W. BONNER, J. E. EVANS, C. W. MALICH y J. R. RISSER.—Study of the breakup of Li^8 (885).
U. R. HAYNES.—Production of high velocity mercury vapor jets by spark discharge (891).
S. B. NILSSON.—On calculation of self-energies in quantum theory by analytic continuation (903).
E. L. HILL.—On the formal extension of Dirac's equation under continuous transformation groups (910).
V. F. HESS y J. D. ROLL.—Identification of surplus gamma-radiation from granite (916).

Vol. 73. Núm. 9. Mayo 1, 1948.

J. E. HILL y W. E. SHOUPP.—Excitation Function for proton-neutron reaction in lithium (Li^7(p, n)) (931).
TA-YOU WU.—Note on second approximation and proton-neutron and proton-proton scattering (934).
A. C. WAHL y G. T. SEABORG.—Nuclear propertier of 93^{237} (940).
B. A. JACOBSHON y R. K. WANGSNESS. — Shapes of nuclear induction signals (942).
R. A. PECK.—Photographic study of the neutron spectra from Al(αn) and Si(n) (947).
S. BERNSTEIN.—Search for a resonance absorption of neutrons in graphite (956)
W. W. HAVENS, L. J. RAINWATER, C. S. WU y J. R. DUNNING.—Slow neutron velocity spectrometer studies of Cu, Ni, Bi, Fe, Sn and calcite (963).
J. ASKHIN y TA-YOU WU.—Neutron-proton and proton-proton scattering at high energies (973).
TA-YOU WU J. ASHKIN.—Elastic and inelastic scattering of 100 to 200 mev protons or neutrons by deuterons (986).
E. P. WIGNER.—On the behavior of cross sections near thresholds (1002).
S. A. KORFF y A. COBAS.—Production of nucleons by the cosmic radiation II (1010).
D. E. ALBURGER.—Gamma-rays from alpha-particle reactions (1014).
R. KARPLUS y J. SCHWINGER.—Note on saturation in microwave spectroscopy (1020).
R. KARPLUS.—Frecuency modulation in microwave spectroscouy (1027).
M. L. POOL y N. L. KRISBERG.—Radioactive cerium and praseodymium (1035).
B. HOFFMAN.—Trajectories of charged meson test particles in the similitarity geometry (1042).
D. H. HALE.—Breack-down of gases in high frequency electrical fields (1046).
R. L. CARTER y W. V. SMITH.—Saturation effect in microwave absorption of ammonia (1053).
J. B. JOHSON.—Secundary electron emmision from targets of barium-strontium oxide (1058).
W. P. MASON, W. O. BAKER, H. J. MCSKIMIN y J. H. HEISS.—Mechamical properties of long chain molecule liquids at ultrasonic frequencies (1074).
P. A. M. DIRAC.—Quantum theory of localizable dynamical systems (1092).

W. H. ZACHARIASEN.—Crystal radii of heavy elements (1104).
A. PAPAPETRON.—Queston of non-singular solutions in generalized theory of gravitation (1105).
A. BOHR.—On the hyperfine structure of deuterium (1109).

Vol. 73. Núm. 10. Mayo 15, 1948.

E. L. KELLY y C. WIEGAND.—Fission of elements fronm Pt to Bi by high energy neutrons (1135).
S. T. EPSTEIN, R. J. FINKELSTEIN y J. R. OPPENHEIMER.—Note on simulated decay of negative messons (1140).
B. D. KERN, D. J. ZAFFARANO y A. C. G. MITCHELL.—Disintigratiom of antimony 124 (1142).
C. SHARP COOK y L. M. LANGER.—Energies of the beta-and gamma-rays from antimony (1149).
E. T. JURNEY y A. C. G. MITCHELL.—Coincidence experiments in antimony 124 (1153).
G. C. BALDWIN y G. S. KLAIBER.—X-ray yield curves for γ-n reactions (1156).
F. P. DICKEY y H. H. NIELSEN.—Infrared spectrum of heavy water vapor (1164).
C. W. SHERWIN.—Conservation of momentum in the beta-decay of Y^{90} (1173).
H. S. SNYDER y P. I. RICHARDS.—Collision and saturation broadening in microwave spectra (1178).
R. L. SEIFERT.—Spectral emissivity and total emissivity of beryllium oxide (1181).
F. LONDON y O. K. RICE.—On solutions of He^3 in He^4 (1188).
J. W. DAVISSON.—Breackdown directions in lithium halide crystals (1194).

Journal of Scientific Instruments

Vol. 25. Núm. 6. Junio 1948.

G. LIEBMANN.—An uncooled all-metal oil diffusion pump (186).
K. H. SWAINGER y J. TWYMAN.—An optical rectangular rosette extensometer for large strains (187).
G. G. MACNAICE.—A simple high-resistence electrostatic voltmeter (189).
N. F. ASTBURY y S. P. ROPER.—A direct-reading silicon meter for electrical sheet steels and a note on resistivity (191).
G. T. BAKER.—A portable electronic chronometer (194).
H. J. TAPSELL, H. V. POLLARD y W. A. WOOD.—A combined creep machine and X-ray spectrometer (198).
H. McG. ROSS y A. L. SHUFFREY.—An electronic square-law circuit (200).
R. G. WOOD y G. WILLIANS.—The positive print method of measuring X-ray reflexions from a single crystal (202).
A. M. ARMOUR.—Eddy current and electrical method of crack detection (209).
F. BRAILSFORD y K. F. SHRUBB.—High-speed photography of welding arcs (211).
O. WEISZ y W. F. COLE.—An improved technique for setting single crystals from cero layer-line photograph (213).
A. BAIRSTO.—The adjustment of a crystal from X-ray rotation photographs (215).
J. M. ROBERTSON.—Three-figure cosine factors for Fourier analysis and synthesis. Part II (216).
S. ROWLANDS.—A new method of determining short half-value periods (218).

Vol. 25. Núm. 7. Julio 1948.

A. V. HILL.—Moving-coil galvanometer of short period and their amplification (225).
A. G. DOWNING.—The construction of microgalvanometer systems (230).
J. L. HOWARTH.—An X-ray glancing angle back reflexion camera (231).
D. J. MEDLEY y H. D. RATHGEBER.—A precision double-pulse generator (234).
R. TELECKI y J. W. WHITEHEAD. — Two portable substandards of frequency (237).
G. O. JONES.—An automatic constant level controller for low boling-point liquids (239).
A. R. BOYLE y F. J. LLEWELLYN.—A portable electrometer for measuring electrostatic charges and capacities (242).
H. McG. ROSS.—An adjustable lamp-holder of kinematic design (244).
H. H. MACEY.—On the application of Laplace pairs to the analysis of relaxation curves (251).

Vol. 25. Núm. 8. Agosto 1948.

W. J. CLARK.—An electromagnetic indicating or recording remote-reading rotamer (257).
V. H. ATREE.—A d. c. stabilized power supply of low impedance (263).
E. H. FROST SMITH.—The theory of magnetic amplifiers and some recent developements (268).
H. DE B. KNIGHT.—The ignitron valve. Notes on operation under experimental conditions (273).
M. B. COYLE y F. G. HAYNES.—A remote reading deal micrometer (275).
R. R. GORDON, H. POWELL y R. A. C. ISBELL.—A new industrial infrared spectrometer (277).

The Review of Scientific Instruments

Vol. 19. Núm. 4. Abril 1948.

D. R. CORSON y R. R. WILSON.—Particle and quantum counters (207).
E. A. QUADE y D. HALLIDAY.—Magnetic lens beta-and gamma-ray spectrometer (234).
A. BAÑOS y M. L. PERUSQUIA.—Directional counter for the determination of the complete azimuthal effect of primary cosmic radiation (239).
W. G. HOYLE.—Voltage regulators of the shunt type (244).
R. PEPINSKY y P. JARMOTZ.—Inductively compled series tube D. C. high voltage regulator (247).
Z. V. HARVALIK.—Electronic eyepiece for spectroscopy of near infra-red (254).
L. M. LANGER y C. S. COOK.—High resolution nuclear spectrometer (256).
G. L. PEARSON.—Magnetic field strengh meter employing the Hall effect in germanium (263).
A. H. LARSEN, F. E. SIMON y C. A. SWENSON.—Rate of evaporation of liquid hydrogen due to the ortho-para hydrogen conversion (266).

Vol. 19. Núm. 5. Mayo 1948.

S. K. ALLISON.—Construction and perfomance of a low voltage arc as a source of positive ions (291).
R. L. BROCK y E. GARNER.—Alpha-particle and deuteron tracks in Eastman NTA photographic plates (299).

S. H. Liebson y H. Friedman.—Self-quenching halogen-filled counters (303).
J. Winckler.—Mach interferometer applied to studying an axillary symmetric supersonic air jet (307).
H. Friedman y L. S. Birks.—Geiger counter spectrometer for X-ray flueres-cen-analysis (323).
B. G. Hogg y H. E. Duckworth. — Vacuum properties of syntetic dielectrics (331).
W. E. Rogers.—New method in the analysis of complex electric waves (332).
A. S. Keeman y R. L. McIntosh.—Strain sensitive resistence wire manometer (336).

Vol. 19. Núm. 6. Junio 1948.

L. Statham.—Pick-up for the measurement of quasi-static angular acceleration (381).
H. E. Newell. — Geometric factors underlying coincidence counting with Geiger counters (384).
L. W. Labaw.—Inside Geiger Müller counter for soft beta-emitters (390).
G. W. Monk.—Vacuum divider: A low presure multiplier (396).
P. G. Ecker y J. Blum.—Ball-bearing drive for the ultracentrifuge (399).

Journal of Applied Physics

Vol. 19. Núm. 6. Junio 1948.

S. S. Penner.—Qualitative experimental verification of the change of burning rate of rocket powders with radiation path length (511).
W. H. Surber.—Universal curves for dielectric-filled wave guides and microwave dieletric measurement methods for liquids (514).
A. W. Straiton, W. E. Gordon y A. H. La Grone.—Method of determining the angle of arrival (524).
E. J. Lawton.—Chaice of operating mode for standing wave type linear accelerators for electrons (534).
W. Prager.—Theory of plastic flow versus theory of plastic deformation (540).
B. Epstein y H. Brooks.—Theory of sxtreme values and its applications in the study of the dielectric streagh of paper capacitors (544).
F. J. Beck y J. M. Kelly.—Magnetization in perpendicularly superposed direct an alterning fields (551).
G. Birkhoff, D. P. MacDougall, E. M. Pugh y G. Taylor. — Explosives with lined cavities (563).
T. E. Hanley.—Spectral emissivity and electron emmision constants of thoria cathodes (583).

The Proceeding of the Physical Society

Vol. 60. Núm. 5. Mayo 1948.

J. L. Pickard y F. E. Simon.—A quantitative study of the expansion method for liquefying helium (405).
M. Desirant y D. Schoenberg.—Peneration of magnetic field into superconductors I. Measurements on thin clylinders (413).
K. D. Foome.—The rate of growth of current and the behavior of the cathode spot in trasient arc discharges (424).

S. P. SINHA.—Blue and ultraviolet bands of K_2 (436).
S. P. SINHA.—Ultraviolets bands of Li_2 (443).
S. P. SINHA.—Ultraviolet bands of NaK (447).
R. M. SILLITTO.—An extension of Kapitea's theory of δ-radiation (453).
G. K. HORTON.—Angular distribution in internal pair creation (457).
E. BRODA, W. E. GRUMMITT, J. GUERON, L. KOWARSKI y G. WILKINSON.—The correction for self-weakining in β-ray measuremenas (460).
D. G. E. MARTIN, H. O. RICHARSON y YUN-KNEI HSU.—The β-ray spectrum of The C''D (466).
B. FERRETTI y M. KROOK.—On the solution of scattering and related problems (480).
A. C. B. LOVELL y J. A. CLEGG.—Characteristics of radio echoes from meteor trails. I. The intensity of the radio reflections and electron density in the trails (491).

Vol. 60. Núm. 6 Junio 1948.

B. ZAJAC, E. BRODA, N. FEATHER.—A further study of the γ-radiation from polonium (501).
PH. NICOLSON y V. SARABHAI.—The semidiurnal variation in cosmic ray intensity (509).
W. M. GIBSON y D. L. LIVESEY.—The neutrons emitted in the disintegration of nitrogen by deuterons (523).
L. GERO y R. SCHMID.—Dissociation energy of the NO molecule (533).
B. BLEANEY y R. P. PENROSE.—Collision broadening of the inversión spectrum of ammonia. III (540).
M. BLACKMANN y J L. MICHIELS.—Efficiency of couting systems (549).
L. B. LOEB.—Certain aspects of the mechanism of spark discharge (561).
G. F. J. GARLICK y A. F. GIBSON.—The electron trap mechanism of luminiscence in sulphide and silicate phosphors (574).
N. F. ASTBURY.—The moving coil galvanometer as a circuit element (590).

J. O. S. A.

Vol. 38. Núm. 7. Julio 1948.

M. BILTZ y J. H. WEBB.—Photographic reciprocity-law failure for radiations of different wave-lengh (561).
M. A. BOUMAN y H. A. VAN DER VELDEN.—Two-quata hypothesis as a general explanation for the behavior of threshold values and visual acutty for the several receptors of the human eye (570).
L. HARRIS, R. T. McGINNIES y B. M. SIEGEL.—Preparation and optical properties of gold blacks (582).
P. C. FOOTE y R. A. WOODSON.—Lens design and tolerance analysis methods and results (590).
S. S. PENNERY, S. WEINBAUM.—Some considerations of the effect of radiation on performance of liquid fuel rockets (599).
A. H. KATZ.—Aerial photographic equipment and applications to recconnaissance (604).
A. HAMMAD.—Scattered and rescattered sunlight (611).
J. B. HAWKES y R. W. ASTHEIMER.—Improved Jamin interferometer (617).
M. RICHARTZ.—Improvement of Savart's polariscope (623).
A. CHAPANIS.—Comparative study of five test of color vision (626).

Vol. 38. Núm. 8. Agosto 1948.

R. C. Jones.—New calculus for the treatment of optical systems. VII (671).
H. Osterberg.—Multipupil in phase microscopy (685).
L. V. Foster y E. M. Thiel.—Achromatic ultraviolet microscope objetive (689).
J. R. De Vore.—Calibration of a photo-multiplier photometer (692).
J. G. Brennan y S. M. Newall.—I. C. I. specifications of difference limens for Munsell hue, value and chroma (696).
M. G. Dreyfus.—Paraxial differential coefficients of a lens system (703).
R. N. Wolfe y F. C. Eisen.—Irradiance distribution in a Lloyd mirror interference patern (706).
M. Luckiesh.—Recommended footcandle levels for prolonged critical seeing (712).
M. Koomen, R. Tousey y H. A. Knoll.—Infra-red pupillometer (719).
K. N. Ogle y P. Boeder.—Distortion of stereoscopic localization (723).
R. E. Sthephens.—Reduction of sphero-chromatic aberratron in catadioptric systems (733).
M. Herzberger.—Image error theory for finite aperture and field. I (736).

Helvetica Physica Acta

Vol. 21. Núm. 2. 1948.

M. Kamuna.—Methode zur Diffusionsmessung zweir Flüssigkeiten vermittelts Ultraschallwellen (93).
E. Baldinger y R. Casale.—Uber Untersetzer (117).
W. Halg y L. Jenny.—Herstellung und Eigenschaften einer photographischen Emulsion zum Nachweis geladener Teilgen (131).
A. Barone.—Ultraschallgenerator mit Normalfrequenz (137).
A. Houriet y A. Kind.—Freinage des neutrons rapides dans le graphite (143).
F. W. P. Gotz y E. Schomann.—Die spektrale Energieverteilung von Himmels und Sonnenstrahlung (151).

Vol. 21. Núms. 3 y 4. 1948.

J. Pirenne.—La methode des perturbations en theory des champs quantifies et la construction de la matrice de Heisenberg (226).
F. Levi y H. J. Philipp.—Untersuchungen Uber die Schallgeschwindigkeit in Kautschuk (233).
P. Jacottet.—Zur Bestimumng der elektromagnetischen Konstanten von Halbleitern im Ultrakurzwellengebiet (251).
H. Greinacher.—Uber eine Methode zur Bestimmung der Dielektrizitätskonsatnten von Flüssigkeiten (261).
F. Metzger, F. Adler y P. Huher.—Untersuchung der n-p-Reaktion an Phosphor (278).
H. Bommel.—Uber die Lischtstreuung au durch Ultraschall ausgerichteten kolloidalen Teichen (289).

Vol. 21. Núm. 5. 1948.

F. Zwicky.—Morphology of aerial propulsión (299).
H. Blattner, H. Granicher, W. Kanzig y W. Merz.—Die Kristallstruktur des hexagonalem und rhombischen Barium-Platnat-Titanats (341).
F. Villars y A. Thellung.—Das magnetische Moment von H_3 y He_3 nach der Moller-Rosenfeld-Theorye der Kernkräfte (355).
K. Zuleer.—Quantitative Autoradiographie (365).

K. Huber y B. Bieri.—Orientierte Abscheidung von Oxyd bei anodischen Oxydation (375).
J. Bacher.—Komplexspektren zweiatomiger Manganhalogenide (379).
H. Bommel.—Uer die Eignung von Ammoniumphosphatkristallen als Ultraschallgeneratoren (390).
R. Maeder.—Das Absorptionspektrum von zweiatomaren Schwefel in Schumanngebiet (411).

Physica

Vol. 14. Núm. 1. Enero 1948.

D. Coster, H. Groendijk and HL. de Vries.—Slow neutron experiments in Groningen (1).
J. K. Lubanski † and C. de Jager.—The scattering of protons by protons and the meson field of the proton (8).
K. J. Keller.—On the electric breakdown of solid dielectrics (15).
Simon Freed and Seymour Katcoff.—The alsorption and fluorescence spectra of bivalent europium ion in crystals (17).
P. M. Endt.—The recovery of the Wilson cloud chamber working with constant final pressure (29).
C. Zwikker.—Systematic relations existing between the propertiers of solid materials (35).
HL. de Vries.—Brownian movement and hearing (48).

Vol. 14. Núm. 2-3. Abril 1948.

A. Michels and T. Wassenaar.—Influence of pressure on the resistance of goldsilver alloys (61).
Lothar Meyer and William Band.—A possible explanation for the anomalous mechano-caloric heat effects in the supercritical flow of HeII trough slits (63).
P. J. Hoogteijling and G. J. Sizoo.—Radioactivity and grain size of soil (65).
P. J. Hoogteijling, G. J. Sizoo and J. L. Yntema.—Measurements on the radon content of groundwater (73).
F. A. Kroger, W. Hoogenstraaten, M. Bottema and TH. J. Botden.—The influence of temperature quenching on the decay of fluorescence (81).
P. M. Endt.—The recovery of the Wilson cloud chamber working with constant final volume (97).
A. Michels and T. Wassenaar.—Vapour pressure of methylfluoride (104).
G. J. Van den Berg.—The electrical resistance of potassium, tungsten, copper, tin and lead at low temperatures (111).
J. de Boer.—Quantum theory of condensed permanent gases I. The law of corresponding states (139).
J. de Boer and B. S. Blaisse.—Quantum theory of condensed permanent gases. II. The solid state and the melting line (149).
J. B. Ubbink.—Thermal conductivity of gaseous hydrogen and of gaseous deuterium (165).
D. Coster and S. Kiestra.—On the empty electron bands of lowest energy of the transition metals Mn and Fe and their oxides (175).

Vol. 14. Núm. 4. Mayo 1948.

L. H. M. van Stevelenburg and J. A. Smit.—Relative transition probabilities in the spectra of Ti I and Ti II (189).
J. Hoogschagen and C. J. Gorter.—The absorption of light in solutions of the rare earth salts (197).

J. L. Snoek.—Dispersion and absorption in magnetic ferrites at frequencies above one Mc/s. (207).
S. R. de Groot and A. Michels.—The Joule-Thomson effect and the specific heat at constant pressure of carbon dioxide (218).
J. Serpe.—Sur le Probléme de la self-énergye de l'électron dans la théorie de Gustafson (223).
W. Opechowski.—On the anisotropic exchange interaction and the behaviour of copper potassium sulphate at very low temperatures (237).
J. C. Van Den Bosch.—The Zeemaneffect in the first selenium spark-spectrum (249).
J. M. W. Milatz, P. M. Endt, C. Th. J. Alkemade and Th. Olink.—The alternating current galvanometer (260).

ACTA DE LA SESION CIENTIFICA CELEBRADA EL DIA 5 DE JULIO DE 1948

Bajo la presidencia del Dr Ríus da comienzo la sesión a las siete y media de la tarde. Actúa de Secretario el Dr. Panizo. Es leída y aprobada el acta de la sesión anterior.

D. Francisco Moreno Martín da cuenta de un trabajo sobre «Reacción del anillo persistente para reconocer el flúor».

Esta nota tiene por objeto dar a conocer una nueva variante de una reacción clásica para reconocer el flúor.

La técnica que proponemos es muy útil para descubrir muy pequeñas cantidades de aquel elemento y se caracteriza por su sencillez y seguridad.

Consiste en recibir el fluoruro de silicio sobre gotita de agua pendiente de un vidrio plano, que cubre el recipiente donde el gas se produce. Evaporando la gotita, lavando y secando el vidrio, queda marcado el borde de aquella por un anillo de sílice transparente, fuertemente adherido al vidrio.

La reacción tiene así gran semejanza con la prueba de corrosión por el ácido fluorhídrico, pero carece de todos los inconvenientes de ésta.

El mismo Sr. Moreno resume otra comunicación realizada en colaboración con D. José Ramos Boneld sobre «Investigación de lactosa en orina».

Fundándonos en la coloración rojo-guinda que las soluciones acuosas de lactosa producen con la metilamina, cuando la reacción se verifica en determinadas condiciones de alcalinidad y temperatura, proponemos un procedimiento para identificar lactosa en orina, tanto si se encuentra solo este azúcar como si va acompañado de glucosa, dando normas sistemáticas que permiten la diferenciación de ambas sustancias en el caso de estar las dos presentes en la orina.

También el Sr. Moreno presenta otro trabajo, muy curioso, en colaboración con el Sr. Santos Merino sobre «Reconocimiento microscópico de la cebada en cenizas».

Las células silíceas de las glumas de la cebada conservan su forma después de incineradas. Este hecho puede tener gran utilidad en el reconocimiento microscópico de la cebada en los productos alimenticios feculentos derivados de ella y particularmente en las mezclas de su harina con la de otros cereales.

Para obtener las cenizas, la técnica consiste sencillamente en carbonizar el producto problema, lavar el carbón con HCl diluído, incinerar a suave temperatura y examinar al microscopio el residuo blanco. Las células silíceas, que conservan su estructura en todos sus detalles, permiten una identificación segura de la gluma de la cebada, aun en mezcla con gran cantidad de harina de otros cereales.

ACTA DE LA SESION CIENTIFICA CELEBRADA EL DIA 18 DE OCTUBRE DE 1948

Bajo la presidencia del profesor Dr. Ríus y actuando de Secretario el profesor Burriel, se abre la sesión a las siete treinta y cinco de la tarde.

Por el Secretario se lee el Acta de la sesión anterior, que es aprobada.

A continuación se exponen las siguientes comunicaciones científicas:

El Sr. Ballester resume un trabajo titulado «Sobre los atmosféricos y campo eléctrico.—I. Un registro electromecánico del gradiente de potencial».

Con el presente trabajo damos inicio a una serie de comunicaciones que,

bajo el mismo título genérico, darán cuenta de las investigaciones llevadas a cabo en Cambridge (Inglaterra), bajo la dirección de T. V. Wormell, Ph. D., de mayo 1947 a enero 1948, sobre el tema indicado.

Los principios teóricos en que se basa la realización experimental de las técnicas que daremos a conocer son someramente como sigue: la llegada de un atmosférico o de una alteración del gradiente normal producirá en el sistema antena una f. e. m. que (despreciando inducciones residuales) podrá expresarse por

$$f(t) = R dQ/dt + Q/C$$

La solución

$$Q = e^{-t/\tau} \left[\int \frac{f(t)}{R} e^{t/\tau} \cdot dt + \text{cons} \right]$$

queda pendiente de la estructura matemática de $f(t)$. Las experiencias avalan la elección de ciertas formas particulares que se dan en la práctica, para las cuales el problema se simplifica; concretamente, para nuestro caso, el incremento del potencial á la altura efectiva de la antena resulta proporcional a la carga separada en el sistema.

De ahí que para un primer análisis (digamos de contorno, no de la microconstitución que fué objeto de otra técnica que ofreceremos en la segunda comunicación) de las variaciones de campo, el órgano fundamental debe sufrir deflexiones proporcionales a la cantidad de electricidad que pasa por el mismo. El electrómetro capilar posee esta cualidad con una inercia dentro de los límites deseados para el caso. El principio del mismo se funda en la diferencia de potencial de contacto mercurio-ácido sulfúrico en el interior de un tubo capilar y en los movimientos de avance y retroceso del menisco.

Los registros, aparte de suministrar magnitud y sentido de las variaciones repentinas del gradiente de potencial debido a descargas máximas, pueden dar idea, por su configuración general, de la distribución de cargas en las nubes.

El profesor Baltá solicita algunas aclaraciones del Sr. Ballester que éste da con toda clase de detalles, que el profesor Baltá agradece.

Por ausencia de los autores el Dr. Panizo lee el resumen de la comunicación del profesor Batuecas y el Dr. J. I. Fernández Alonso, sobre «Nueva revisión de la densidad del Hg a 0º C.».

El procedimiento pignométrico establecido por uno de los autores (T. B.) en 1935, ha sido modificado para poder realizar todas las operaciones de llenado, calibrado y pesado del pignómetro, con este vacío de aire.

La media de siete calibrados concordantes, hechos con agua bidestilada y recientemente hervida, hechas todas las correcciones (incluso la llamada de capilaridad) proporciona para el volumen del pignómetro el valor:

$$V = (25{,}4026 - 0{,}0001_1) \text{ c. c.}$$

Por otra parte, la media de once medidas efectuadas para la densidad del Hg a 0º C. conduce al valor:

$$d^0{}_4 = (13{,}5955_6 - 0{,}0000_6) \text{ gr./c. c.}$$

en excelente concordancia con el anteriormente obtenido en Compostela por T. Batuecas y F. L. Casado:

$$d^0{}_4 = (13{,}5955_3 - 0{,}0000_4) \text{ gr./c. c.}$$

Finalmente el Sr. Lucena en su nombre y en el del profesor Burriel explica los resultados obtenidos en un trabajo titulado «Aplicaciones analíticas de la valoración de sales ferrosas en presencia de iones sulfociánicos.—Nota IV: Sobre la determinación del hierro en sus minerales y aleaciones».

Se propone un método para valorar el hierro férrico consistente en reducirlo con sulfato titanoso en presencia de sulfocianuro, y valorarlo una vez reducido con dicromato según el método expuesto en la nota I. Se indica un método para la preparación y fácil conservación de la solución titanosa sin necesidad de la ausencia de aire. Sobre el método que emplea el cloruro estannoso como reductor presenta la ventaja de un más claro final de la reducción por lo cual puede emplearse en soluciones ligeramente coloreadas, evitándose además la posibilidad de perder la valoración si se añade un exceso de reductor. El método que se presenta sin embargo no puede emplearse en medio clorhídrico considerándose satisfactorio para las valoraciones en medio sulfúrico. Se justifica esto mediante una serie de análisis de soluciones de sulfato férrico y diversos minerales y aleaciones.

Y no habiendo más asuntos de qué tratar se levanta la sesión a las ocho y cinco de la tarde.

DISPONIBLE

SERVICIO DE BIBLIOTECA Y FOTOCOPIAS

Reorganizada la Biblioteca en magníficos locales, que permiten el trabajo cómodo de los socios que deseen consultar las revistas o libros de la misma, la Junta directiva de esta Real Sociedad expresa el acuerdo, hace años tomado en bien de la buena marcha de la Biblioteca, de no permitir sacar de la misma ningún ejemplar por no tenerlos duplicados y evitar el deterioro de las revistas y libros.

Estará abierta todos los días laborables de 10,30 a 13,30 y de 16 a 18 horas, excepto los sábados por la tarde. Para informes llamar al teléfono 23-80-96.



Nuevas Gráficas, S. A.—Tel. 23 30 29